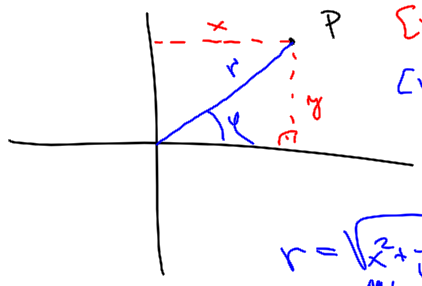
křivka $c: \mathbb{R} \to E_n$

funkce $f: E_m \to \mathbb{R}$

zobrazení $E_m \to E_n$

9 26-12:02



$[x,y]$

$[r,\varphi]$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ pro $x \neq 0$

9 26-12:06

kružnice $\{[x,y] \in E_2;\ x^2+y^2=1\}$

kartézské

polární

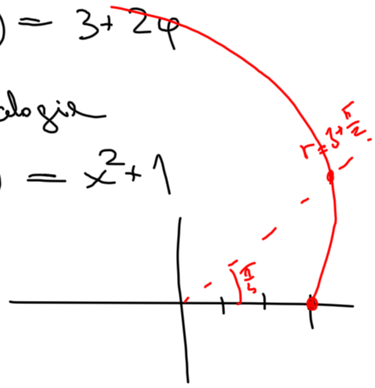
$\{[r,\varphi] \in E_2;\ r=1\}$

9 26-12:10

$r(\varphi) = 3+2\varphi$

analogie

$y(x) = x^2+1$



9 26-12:13

$y=f(x)$ $\quad f: E_m \to \mathbb{R}$

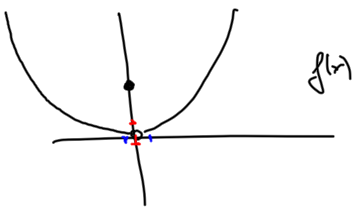
$\lim\limits_{x \to x^* \in E_m} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Leftrightarrow \forall\, \mathcal{U}(L)\ \exists\, \mathcal{U}(x^*):$

$\forall x \in \mathcal{U}(x^*) \setminus \{x^*\}:$

$f(x) \in \mathcal{U}(L)$

9 26-12:15



$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

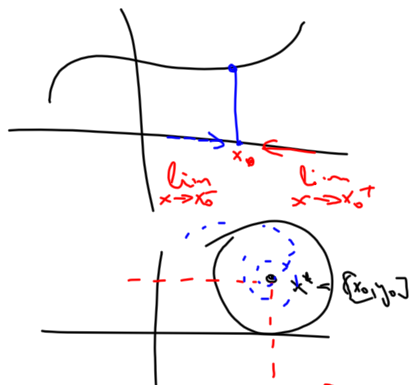
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \underbrace{|x-0|}_{x \neq 0,\ x^*}<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - \underbrace{0}_{L}| < \varepsilon)$

Volba $\delta := \sqrt{\varepsilon}$

9 26-12:17



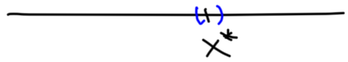
posloupnost $[x_n,y_n] \to [x_0,y_0]$

$f([x_n,y_n]) \to L$

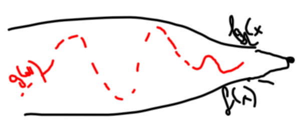
9 26-12:24

jednoznačnost

stačí volit $U(L_1) \cap U(L_2) = \emptyset$



věta o 3 limitách



$\forall x: f(x) \le g(x) \le h(x)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = L$

9 26-12:28

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x) + d\cdot g(x)) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x) + d\cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

zejména

$\lim c\cdot f(x) = c\cdot \lim f(x)$

$\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$

$\lim f(x)\cdot g(x) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ za splnění určitých podmínek

9 26-12:33

Literatura Zobrazení a funkce více proměnných Limita a spojitost funkce Parciální a směrové derivace

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{c-d}$

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{\cancel{x^2+y^2+1-1}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2$$

$\ne$

$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0}$

9 26-12:36

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

$\downarrow$

0

v lib. okolí $(0,0) \cap D(f)$ je ohraničená

$\lim f(x,y) = 0$

9 26-12:39

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

POZOR!

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

po přímkách $y = kx$, k konst.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}$ ZÁVISÍ NA k!

$\Rightarrow$ není limita

alternativně: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi \text{ lib.}}} \frac{r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2}$

$= \lim_{\varphi \text{ lib.}} \cos\varphi\sin\varphi =$

$= \frac{1}{2}\sin 2\varphi$ ZÁVISÍ NA φ!

9 26-12:41

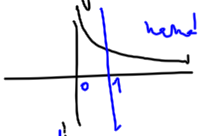
kompaktní: uzavřená, ohraničená.

① není ohr. $\mathbb{R}$

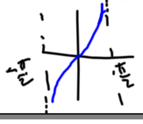
$y = x$ nemá na $\mathbb{R}$ max. ani min

② není uzavř., je ohraničená

$(-1,1)$ nemá max.



$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $y = \mathrm{tg}$



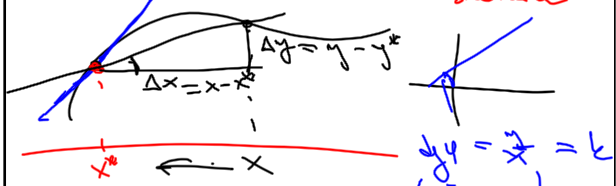
9 26-12:50

Derivace

differentiate

směrnice tečny $y = \underline{k} \cdot x + q$

směrnice



$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} = k$ (při $q=0$)

sečna: $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y-y^*}{x-x^*}$

tečna: $\mathrm{tg}\,\varphi = \lim\limits_{x \to x^*} \frac{y-y^*}{x-x^*} = \lim\limits_{x\to x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$

$x = x^* + h$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h}$

9 26-12:55

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

v bodě $(x_1^*, \dots x_n^*)$

$g(x) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x, x_{i+1}^*, \dots x_n^*)$

$g'(x_i^*) = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$

9 26-13:02

V jedné proměnné:

z existence vlastní derivace v bodě

$\Longrightarrow$ spojitost v bodě

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}}(x-x_0) + f(x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

spojitost

9 26-13:08

Příklad $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x=0 \vee y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$$f'_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = 0$$

Přitom $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

9 26-13:12

$v = (1,2,0)$

$$f'_v(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^* + t\cdot v) - f(x^*)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^* + t\cdot 1, x_2^* + t\cdot 2, x_3^*) - f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)}{t}$$

9 26-13:17

Příklad

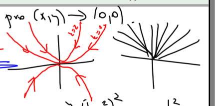
Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci "po různých parabolách" dostáváme různé limity).

a) $\nexists$ limita pro $(x,y) \to (0,0)$

$y = kx^2$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\cdot(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^4} = \frac{k^2}{1+k^4}$$

závisí na k!

b) má v $(0,0)$ ve všech směrech nulovou derivaci $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$$d_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cdot v_1, 0+t\cdot v_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{t}}\left(\frac{\cancel{t^4} v_1^4 \cdot t^2 \cdot v_2^2}{t^8 v_1^8 + \cancel{t^4} \cdot v_2^4}\right) =$$

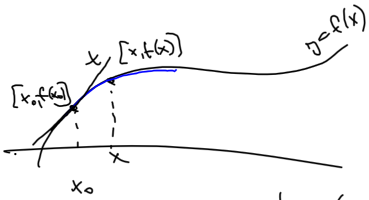
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot v_1^4 \cdot v_2^2}{t^4 v_1^8 + v_2^4} = 0$$

(pro $v_2 \neq 0$ ihned, pro $v_2 = 0$ $\lim_{t\to 0} \frac{0}{t^4 \cdot v_1^8} = 0$)

9 26-13:25

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{si}\cancel{n}\, x}{\cancel{n}} = 6 \quad \text{six}$$

9 26-13:34



$$t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{dy} = f'(x_0)\cdot \underbrace{(x - x_0)}_{dx}$$

diferenciál: $h \mapsto f'(x_0)\cdot h$

9 26-13:36