

diferenciál ... lineární zobrazení
 Pr: $x_0=t_0$ $h=1$
 $h \mapsto df(x_0)(h)$

10 3-11:59

Diferenciál – shrnutí

Funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je tedy diferencovatelná v bodě x , jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

- 1 v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $v \mapsto d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
- 3 $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x+v) - f(x) - d_v f(x))$,
 tj. $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x+v) - f(x) - a \cdot v)$.

ALÉ NA VÍCE:
 $v \mapsto d_v f(x)$
 $t \cdot n \mapsto t \cdot d_v f(x)$
 $u+n \mapsto d_u f(x) + d_n f(x)$

10 3-12:18

Věta
 Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x , pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = df(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu $d_v f(x) = a \cdot v$.

Důkaz:
 $d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x+tv) - f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (df(x)(tv) + \tau(tv)) =$
 $= df(x)(v) + \|v\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = df(x)(v) = a \cdot v.$

$df(x)(tv) = t \cdot df(x)(v)$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot df(x)(t \cdot v) = df(x)(v)$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(tv)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} \cdot \frac{\|tv\|}{t} =$
 $= \pm \|v\| \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = 0$
 = 0 z df. diferenc. a h

10 3-12:29

Pozn. $f: E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ $x^* \in E_3$
 $(f'_x(x^*), f'_y(x^*), f'_z(x^*)) =$
 vektor parc. derivací
 $= (d_{(1,0,0)} f(x^*), d_{(0,1,0)} f(x^*), d_{(0,0,1)} f(x^*)) =$
 směrové derivace
 $= (a \cdot (1,0,0), a \cdot (0,1,0), a \cdot (0,0,1))$
 pro $a = (a_1, a_2, a_3)$
 $= (a_1, a_2, a_3) = a$

10 3-12:37

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
 Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $df : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
 na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

$df : n \mapsto d_n f = a \cdot n$,
 kde $a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$

$n = (dx, dy)$
 $d_n f = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = a \cdot n$

10 3-12:44

úvaha
 Kvůli přehlednosti označme $h := dx, k := dy$. Pak
 $f(x^* + dx, y^* + dy) - f(x^*, y^*) =$
 $= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 =$
 $= 2x^*h + 2y^*k + h^2 + k^2.$

Odtud $df(x^*, y^*)(h, k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ a $\tau(h, k) = h^2 + k^2$.

Uvědomme si, že
 a) $(h, k) \mapsto 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ je lineární funkce
 b) $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \sqrt{h^2+k^2} = 0$

10 3-12:47

Literatura **Diferenciál** Derivace vyšších řádů, Taylorova věta Lokální a absolutní extrémů funkcí více proměnných

Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f .

Pr: $z = 3 + 2 \cdot (x - 5) - \frac{1}{2}(y + 1)$
 $x_0 = 5$ $f'_x(5, -1) = 2$ $f'_y(5, -1) = -\frac{1}{2}$
 $y_0 = -1$ $f(5, -1) = 3$

10 3-13:03

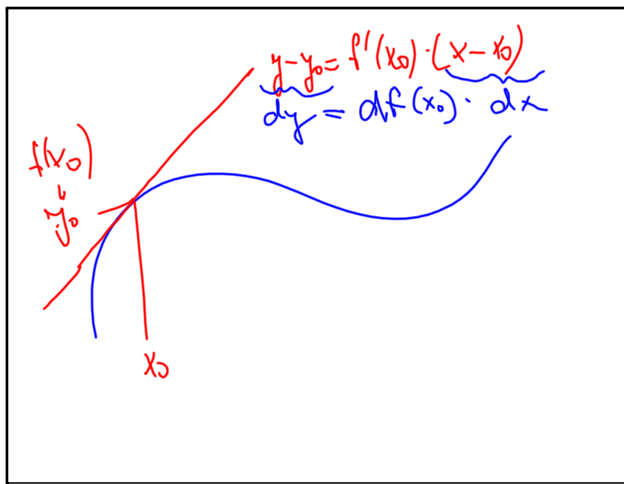
Literatura **Diferenciál** Derivace vyšších řádů, Taylorova věta Lokální a absolutní extrémů funkcí více proměnných

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = df(v).$$

Výsledkem je $df(v) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.

10 3-13:09



10 3-13:14

Binom. věta

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k =$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

$(x+y)^n = (x+y)(x+y) \dots (x+y)$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^3 =$

$= \frac{\partial^3}{\partial x^3} x^3 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + \dots$

10 3-13:32

Literatura **Diferenciál** Derivace vyšších řádů, Taylorova věta Lokální a absolutní extrémů funkcí více proměnných

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x, y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0, 0]$ s diferenciemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:
 $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}$.

Pak

$$T_2(0 + \xi, 0 + \eta) =$$

$$= f(0,0) + df(0,0) \cdot (\xi, \eta) + (\xi, \eta) \cdot \frac{1}{2} d^2 f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \eta + \frac{1}{2} \eta^2.$$

$Hess(f)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \eta^2$

10 3-13:40