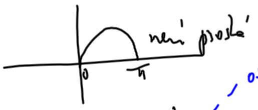
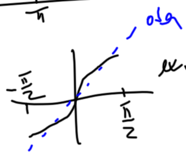
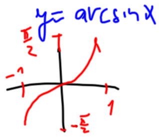
$y = \sin x \qquad y = f(x)$

Inverzní funkce $\qquad x = f^{-1}(y)$

f musí být prostá (injektivní)







10 17-11:56

$y = \arcsin x \qquad x = \sin y$

$y' = (\arcsin x)' = (\arcsin(\sin y))' =$

$= [\arcsin'(\sin y)] \cdot \boxed{\cos y}$

$1 = \arcsin'(\sin y) \cdot \cos y$

$\frac{1}{\cos y} = \arcsin'(x) \qquad$ na $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10 17-12:10

Příklad

Rozhodněte, zda zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované po souřadnicích
$$f(x,y) = xy, \; g(x,y) = \frac{x}{y}$$
je prosté v okolí bodu $[2,1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2,1)$.

$$D^1F(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}(x^*)$$

$$D^1F(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -\frac{2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det D^1F(2,1) = -4 \neq 0 \Rightarrow F$ je prostá v okolí $[2,1]$

10 17-12:21

Spočtěme pro $G = F^{-1}$, $F(2,1) = [2,2]$

$$D^1G(2,2) = \underset{\text{věta}}{=} \left(D^1F(2,1)\right)^{-1} !$$

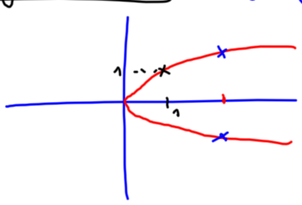
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \quad \text{inv. matice}$$

$$\frac{1}{\det} \cdot A^*$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

10 17-12:25

$y^2 - x = 0 \qquad y = y(x)$



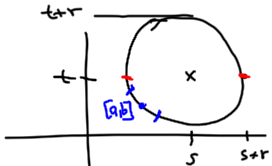
není funkce

$2 \cdot y(x) \cdot y'(x) - 1 = 0$

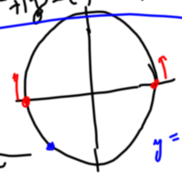
$$\boxed{y'(x) = \frac{1}{2 \cdot y(x)}}$$

$y'(1) = \frac{1}{2 \cdot y(1)} = \frac{1}{2}$

10 17-12:31



$$\boxed{F(x,y) = (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2}$$



$F'_y = 2(y-t)$

$F'_y = 0 \Leftrightarrow y = t$

$\Rightarrow (x-s) = \pm r$

10 17-12:36

$F(x,y): E_2 \to \mathbb{R}$

$0 = \mathrm{d}F = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y = (F_x + F_y f'(x))\,\mathrm{d}x.$

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$F_y \cdot f'(x) = -F_x$

$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$

$(x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2 = 0 \quad |$ der. podle x

$2(x-s)\cdot 1 + 2(y-t)\cdot y'(x) = 0$

$y'(x) = \frac{x-s}{y-t}$

10 17-12:44

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz - 1 = 0.$

Stacionární body musí splňovat: $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$,

$y = \sqrt{2}x$

$F(x, \sqrt{2}x, 2x) = x^2 + 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 - 4x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

10 17-12:54

Rešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat: $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$, a tedy $y = \sqrt{2}x$. Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body $[1, \sqrt{2}, 2]$ a $[-1, -\sqrt{2}, -2]$. V těchto bodech je $F_z \neq 0$ (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce $z = f(x,y)$. Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace f 2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

$H_z(1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ neg. def. (Sylvester)

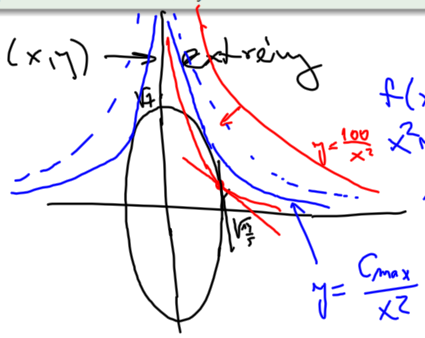
$H_z(-1, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ poz. def.

10 17-12:58

Příklad

Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2y$ na množině M dané implicitně rovnicí $5x^2 + 2y^2 = 14$.

$f(x,y) \to$ extrémy

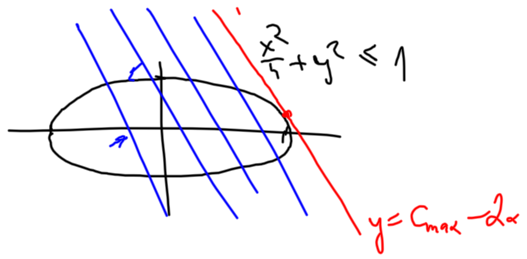


$f(x,y) = c$

$x^2y = c$

$y = \frac{c}{x^2}$

10 17-13:25



$2x + y \to \max$

$2x + y = C$

$y = C - 2x$

10 17-13:37

10 17-13:38