Matematika I – 10a
Lineární procesy

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 11. 2012

Obsah přednášky

Iterované procesy

Procesy bývají popsány prostřednictvím lineární operace pro jednotlivá časová období (linearizovaný model). Budeme chtít studovat jeho chování během delší doby.

Example

Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.).

- Stav x_n je tedy dán vektorem $(a_1, \dots, a_m)$ závisejícím na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme.
- Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

  při přírůstku času z t_k na t_{k+1}.

Příkladem lineárních procesů je *Leslieho model růstu* s maticí (pro $m = 5$)

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

ve které:

- f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první);
- τ_i je relativní úmrtnost i-té skupiny během jednoho období.

Předpokládejme chvíli, že pro konkrétní koeficienty může být dominantní vlastní číslo λ_0 vetší než jedna, zatímco absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel λ_i budou ostře menší než jedna. Iterace dávají pro každý vektor $v = v_0 + v_1 +$ rozložený na vlastní vektory matice (pomíjíme teď složitější možnost různých algebraických a geometrických násobností jednotlivých vlastních čísel)

$$\varphi^k(v) = \lambda_0^k v_0 + \lambda_1^k v_1 + \dots .$$

V takovém případě při iteraci kroků našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému vymizení všech komponent v jednotlivých vlastních podprostorech kromě v_0. Poměrné proporce rozložení populace do věkových skupin se budou blížit poměrům komponent vlastního vektoru k dominantnímu vlastnímu číslu.

Například pro matici (uvědomme si význam jednotlivých koeficientů)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03,\ 0,\ -0.5,\ -0,27 + 0.74i,\ -0.27 - 0.74i$$

s velikostmi 1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78 a vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu je přibližně

$$x = (30\ 27\ 21\ 14\ 8).$$

Zvolili jsme rovnou jediný vlastní vektor se součtem souřadnic rovným 100, zadává nám proto přímo výsledné procentní rozložení populace.

Častý případ lineárních procesů je popis systému, který se může nacházet v m různých stavech s různou pravděpodobností. V jistém okamžiku je ve stavu s pravděpodobností a_i pro stav i a k přechodu z možného stavu i do stavu j dojde s pravděpodobností t_{ij}.

Popis procesu:

V čase n je systém popsán pravděpodobnostním vektorem $x_n = (a_1, \dots, a_m)$. Tj. komponenty vektoru x jsou reálná nezáporná čísla a jejich součet je roven jedné. Komponenty udávají rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých možností stavů systému. Rozdělení pravděpodobností pro čas $n+1$ je dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $T = (t_{ij})$, tj.

$$x_{n+1} = T \cdot x_n.$$

Protože vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory.

Takovému procesu říkáme **Markovův proces**.
Každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij} x_j = \sum_j \Big(\sum_i t_{ij}\Big) x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože je součet řádků matice T vždy roven vektoru $(1, \dots, 1)$, bude jednička zaručeně vlastním číslem matice T a k ní musí existovat vlastní vektor x_0.

Theorem (Perronova–Frobeniova teorie)

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s nezápornými prvky, jejíž nějaká mocnina A^k má samé kladné prvky. Pak platí

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$,*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Důsledkem této věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- existence vlastního vektoru x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní
- přibližování hodnoty iterací $T^k x_0$ k vektoru x_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor x_0.

První tvrzení vyplývá přímo z kladnosti souřadnic vlastního vektoru zmíněné v Perronově–Frobeniově větě, druhé pak z toho, že absolutní hodnoty všech ostatních vlastních čísel musí být ostře menší než jedna.

Sledovanost televizí

Vysílají jisté dvě televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom roce přejde 1/6 diváků první stanice ke druhé stanici, 1/5 diváků druhé stanice přejde k první stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces.

Maticí Markovova procesu je zjevně

$$T = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Matice má dominantní vlastní hodnotu 1, příslušný vlastní vektor je $(\frac{6}{5}, 1)$. Protože je vlastní hodnota dominantní, tak se poměr diváků se ustálí na poměru $6 : 5$.

Ruleta

Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 100 Kč. Vždy všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá 800 Uvažte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.

Jednotlivé stavy systému jsou dány aktuální hodnotou, kterou hráč má. Jsou to tedy částky 0, 100, 200, 400 a 800 Kč. Sloupce příslušné matice jsou obrazem situace, kdy hráč je s pravděpodobností jedna v odpovídajícím stavu (tj. standardních vektorů báze $\mathbb{R}^5$).

Výsledná matice je:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$.
Všimněte si podobnosti s Leslieho růstovým modelem.