

# Matematika I – 11b

## Analytická geometrie – afinní prostory

Jan Slovák

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

28. 11. 2012

# Obsah přednášky

- 1 Afinní prostory
- 2 Konvexní množiny a lineární programování
- 3 Afinní zobrazení

# Plán přednášky

- 1 **Afinní prostory**
- 2 Konvexní množiny a lineární programování
- 3 Afinní zobrazení

## Definition

Afinním prostorem  $\mathcal{A}$  se zaměřením  $V$  rozumíme množinu **bodů**  $P$ , spolu se zobrazením  $P \times V \rightarrow P$ ,  $(A, v) \mapsto A + v$ , splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor  $v \in V$  je tak definována **translace**  $\tau_v : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \rightarrow P, \quad A \mapsto A + v.$$

**Dimenzí** afinního prostoru  $\mathcal{A}$  rozumíme dimenzi jeho zaměření.

## Definition

Afinním prostorem  $\mathcal{A}$  se zaměřením  $V$  rozumíme množinu **bodů**  $P$ , spolu se zobrazením  $P \times V \rightarrow P$ ,  $(A, v) \mapsto A + v$ , splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor  $v \in V$  je tak definována **translace**  $\tau_v : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \rightarrow P, \quad A \mapsto A + v.$$

**Dimenzí** afinního prostoru  $\mathcal{A}$  rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Nadále nebudeme rozlišovat  $\mathcal{A}$  a  $P$  v označení. Z axiomů okamžitě plyne pro libovolné body  $A, B, C$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} A - A &= 0 \in V \\ B - A &= -(A - B) \\ (B - A) + (C - B) &= (C - A). \end{aligned}$$

Volba jednoho pevného bodu  $A_0 \in \mathcal{A}$  nám určuje bijekci mezi  $V$  a  $\mathcal{A}$ .

Volba jednoho pevného bodu  $A_0 \in \mathcal{A}$  nám určuje bijekci mezi  $V$  a  $\mathcal{A}$ .

Při volbě pevné báze  $\underline{u}$  ve  $V$  tak dostáváme pro každý bod  $A \in \mathcal{A}$  jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

### Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic**  $(A_0; u_1, \dots, u_n)$  zadané **počátkem afinní souřadné soustavy**  $A_0$  a bazí zaměření  $\underline{u}$ .  
Hovoříme také o **afinním repéru**  $(A_0, \underline{u})$ .

Volba jednoho pevného bodu  $A_0 \in \mathcal{A}$  nám určuje bijekci mezi  $V$  a  $\mathcal{A}$ .

Při volbě pevné báze  $\underline{u}$  ve  $V$  tak dostáváme pro každý bod  $A \in \mathcal{A}$  jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

### Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic**  $(A_0; u_1, \dots, u_n)$  zadané **počátkem afinní souřadné soustavy**  $A_0$  a bazí zaměření  $\underline{u}$ .

Hovoříme také o **afinním repéru**  $(A_0, \underline{u})$ .

Afinní souřadnice bodu  $A$  v soustavě  $(A_0, \underline{u})$  jsou souřadnicemi vektoru  $A - A_0$  v bázi  $\underline{u}$  zaměření  $V$ .



Volba jednoho pevného bodu  $A_0 \in \mathcal{A}$  nám určuje bijekci mezi  $V$  a  $\mathcal{A}$ .

Při volbě pevné báze  $\underline{u}$  ve  $V$  tak dostáváme pro každý bod  $A \in \mathcal{A}$  jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

### Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic**  $(A_0; u_1, \dots, u_n)$  zadané **počátkem afinní souřadné soustavy**  $A_0$  a bazí zaměření  $\underline{u}$ .

Hovoříme také o **afinním repéru**  $(A_0, \underline{u})$ .

Afinní souřadnice bodu  $A$  v soustavě  $(A_0, \underline{u})$  jsou souřadnicemi vektoru  $A - A_0$  v bázi  $\underline{u}$  zaměření  $V$ .

Volba afinního souřadného systému ztotožňuje  $n$ -rozměrný afinní prostor  $\mathcal{A}$  se standardním afinním prostorem  $\mathcal{A}_n$ .

### Definition (Afinní podprostory)

Neprázdná podmnožina  $Q \subset \mathcal{A}$  afinního prostoru  $\mathcal{A}$  se zaměřením  $V$  se nazývá **afinní podprostor** v  $\mathcal{A}$ , je-li podmnožina  $W = \{B - A; A, B \in Q\} \subset V$  vektorovým podprostorem a pro libovolné  $A \in Q$ ,  $v \in W$  je  $A + v \in Q$ .

### Definition (Afinní podprostory)

Neprázdná podmnožina  $Q \subset \mathcal{A}$  afinního prostoru  $\mathcal{A}$  se zaměřením  $V$  se nazývá **afinní podprostor** v  $\mathcal{A}$ , je-li podmnožina  $W = \{B - A; A, B \in Q\} \subset V$  vektorovým podprostorem a pro libovolné  $A \in Q$ ,  $v \in W$  je  $A + v \in Q$ .

Skutečně je rozumné mít obě podmínky v definici, protože je snadné najít příklady podmnožin, které budou splňovat první, ale nikoliv druhou. (Např. přímka v rovině s vyjmutým jedním bodem.)

# Plán přednášky

- 1 Afinní prostory
- 2 Konvexní množiny a lineární programování**
- 3 Afinní zobrazení

Podmnožina  $M$  afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body  $A, B$  obsahuje i celou úsečku  $\Delta(A, B)$ . Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými  $k + 1$  body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex. Konvexními množinami jsou např.

(1) prázdná podmnožina

(2) afinní podprostory

(3) úsečky, polopřímky  $p = \{P + t \cdot v; t \geq 0\}$ , obecněji  $k$ -rozměrné poloprostory

$\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \dots + t_k \cdot v_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$ , úhly v dvojrozměrných podprostorech

$\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2; t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$ , atd.

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu  $M$  nazýváme **konvexní obal**  $\mathcal{K}(M)$  množiny  $M$ .

## Theorem

*Konvexní obal libovolné podmnožiny  $M \subset \mathcal{A}$  je*

$$\mathcal{K}(M) = \left\{ t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s; \sum_{i=1}^s t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají **konvexní mnohostěny**. Jsou-li definující body  $A_0, \dots, A_k$  konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě  $k$ -rozměrný **simplex**. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

V problému lineárního programování je množina přípustných hodnot vždy konvexní.

Lineární formy nabývají maxima či minima na konvexní množině vždy na hranici v některém z vrcholů z příslušného konvexního mnohočlenu.

# Plán přednášky

- 1 Afinní prostory
- 2 Konvexní množiny a lineární programování
- 3 Afinní zobrazení**



Zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  je afinní, právě když existuje lineární zobrazení  $\varphi$  mezi zaměřenými takové, že

$$f(x + v) = f(x) + \varphi(v)$$

Zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  je afinní, právě když existuje lineární zobrazení  $\varphi$  mezi zaměřenými takové, že

$$f(x + v) = f(x) + \varphi(v)$$

Zobrazení  $f$  je afinní, právě když zachovává afinní kombinace bodů.

Afinní kombinace dvojice bodů můžeme také dobře vyjádřit pomocí tzv. **poměru bodů** na přímce. Jeli bod  $C$  afinní kombinací bodů  $A$  a  $B \neq C$ ,  $C = rA + sB$ , pak řekneme že číslo

$$\lambda = (C; A, B) = -\frac{s}{r}$$

je poměrem bodu  $C$  vzhledem k daným bodům  $A$  a  $B$ . Protože bod  $C$  můžeme vyjádřit jako

$$C = A + s(B - A) = B + r(A - B),$$

je poměr  $\lambda$  ve skutečnosti poměrem velikostí orientovaných vektorů  $C - A$  a  $C - B$ . Zejména je  $\lambda = -1$  právě, když je  $C$  středem úsečky dané body  $A$  a  $B$  (tj. v naší afinní kombinaci bude  $r = s = \frac{1}{2}$ ).

Naše charakterizace afinních zobrazení prostřednictvím afinních kombinací má velice srozumitelně znějící důsledek:

### Corollary

*Afinní zobrazení jsou právě ta zobrazení, která zachovávají poměry.*

# Změny souřadnic

Volbou afinních souřadnic  $(A_0, \underline{u})$  na  $\mathcal{A}$  a  $(B_0, \underline{v})$  na  $\mathcal{B}$  dostáváme souřadné vyjádření afinního zobrazení  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Přímo z definice je zřejmé, že stačí vyjádřit obraz  $f(A_0)$  počátku souřadnic v  $\mathcal{A}$  v souřadnicích na  $\mathcal{B}$ , tj. vyjádřit vektor  $f(A_0) - B_0$  v bázi  $\underline{v}$  jako sloupec souřadnic  $y_0$  a vše ostatní je pak určeno násobením maticí zobrazení  $\varphi$  ve zvolených bazích a přičtením výsledku. Každé afinní zobrazení tedy v souřadnicích vypadá takto:

$$x \mapsto y_0 + Y \cdot x,$$

kde  $y_0$  je jako výše a  $Y$  je matice zobrazení  $\varphi$ .

Transformace afinních souřadnic odpovídá, obdobně jako u lineárních zobrazení, vyjádření identického zobrazení ve zvolených afinních repérech. Změna souřadného vyjádření afinního zobrazení v důsledku změny bazí se snadno spočte pomocí násobení a sčítání matic a vektorů.

Skutečně, při změně báze na definičním oboru daném posunutím  $w$  a maticí  $M$ , přičemž staré souřadnice pomocí nových jsou

$$x = w + M \cdot x',$$

a změně na oboru hodnot  $s$  posunutím  $z$  a maticí  $N$ , přičemž nové souřadnice jsou pomocí starých

$$y' = z + N \cdot y.$$

dostáváme pro zobrazení dané v původních bazích vektorem posunutí  $y_0$  a maticí  $Y$  přímým výpočtem

$$\begin{aligned}y' &= z + N \cdot y = z + N \cdot (y_0 + Y \cdot x) \\ &= (z + N \cdot y_0 + N \cdot Y \cdot w) + (N \cdot Y \cdot M) \cdot x'.\end{aligned}$$

Je tedy afinní zobrazení v nových bazích dáno vektorem posunutí

$$z + N \cdot y_0 + N \cdot Y \cdot w$$

a maticí

$$N \cdot Y \cdot M.$$