Matematika I – 12a
Euklidovská geometrie

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

3. 12. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

1. Euklidovské prostory
2. Odchylky podprostorů
3. Standardní úlohy
4. Objemy

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z\rangle = x^T \cdot y.$$

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z\rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$.

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z \rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$.
Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.

Již jsme se vzdálenostmi pracovali s pomocí skalárních součinů ve vektorových prostorech. V analytické geometrii lze takto:

Definition

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, z\rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$.
Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.
Euklidovské podprostory v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Theorem (jednoduché vlastnosti skalárních součinů)

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(**trojúhelníková nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\|\,\|v\|$ *(**Cauchyova nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ (**Besselova nerovnost**).*
4. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ právě když $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ (**Parsevalova rovnost**).*
5. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ a $u \in V$ je vektor $w = (u \cdot e_1)e_1 + \cdots + (u \cdot e_k)e_k$ jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.*

K důkazům se vrátíme ve středu (jsou v textech).

Theorem (jednoduché důsledky pro euklidovskou geometrii)

Pro body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ *platí*

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
2. $\rho(A, B) = 0$ *právě, když* $A = B$
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
4. *V každé kartézké souřadné soustavě* $(A_0; \underline{e})$ *mají body*

   $$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

   vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$.
5. *Pro podprostory* $\mathcal{R}$ *a* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}_n$ *existují bod* $P \in \mathcal{Q}$ *a* $Q \in \mathcal{R}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$. *Vzdálenost bodů* Q *a* P *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ *pro libovolné body* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$.

Speciálním případem posledního bodu je tvrzení:

Je–li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Speciálním případem posledního bodu je tvrzení:

Je–li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Vektor $A - B$ se jednoznačně rozkládá na $A - B = u_1 + u_2$, $u_1 \in Z(\mathcal{Q})$, $u_2 \in Z(\mathcal{Q})^\perp$. Přitom u_2 nezávisí na volbě $B \in \mathcal{Q}$, $P = A + (-u_2) = B + u_1 \in \mathcal{Q}$ a $\|A - B\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|A - P\|$. Odtud již vyplývá, že minima je skutečně dosaženo, a to pro bod P. Vypočtená vzdálenost je skutečně $\|u_2\|$.

Příklad – vzdálenost přímek

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p:\ [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q:\ [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Příklad – vzdálenost přímek

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk je: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp}=\langle(8,-2,4)\rangle=\langle(4,-1,2)\rangle$.

Příklad – vzdálenost přímek

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: \ [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: \ [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk je: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp}=\langle(8,-2,4)\rangle=\langle(4,-1,2)\rangle$. Spojnicí daných přímek je například úsečka $[1,-1,0][2,5,-1]$, promítneme tedy vektor $[1,-1,0]-[2,5,-1]=(-1,-6,1)$. Pro vzdálenost přímek pak dostáváme:

$$\rho(p,q)=\frac{|(-1,-6,1)\cdot(4,-1,2)|}{\|(4,-1,2)\|}=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Plán přednášky

Geometrické pojmy jako odchylky, orientace, objem apod. jsou v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděny prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.

Geometrické pojmy jako odchylky, orientace, objem apod. jsou v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděny prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

Geometrické pojmy jako odchylky, orientace, objem apod. jsou v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděny prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

Geometrické pojmy jako odchylky, orientace, objem apod. jsou v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděny prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.
Odchylka je nezávislá na velikostech a vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$.

Geometrické pojmy jako odchylky, orientace, objem apod. jsou v bodových prostorech $\mathcal{E}_n$ zaváděny prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.
Odchylka je nezávislá na velikostech a vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$.Ve vícerozměrných prostorech je odchylka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula).

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2(u\cdot v) = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\varphi(u,v).$$

To je tzv. **kosinová věta**.

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2(u\cdot v) = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\varphi(u,v).$$

To je tzv. **kosinová věta**.
Dále platí pro každou ortonormální bázi $\underline{e}$ a $u \in V$ vztah $\|u\|^2 = \sum_i |u\cdot e_i|^2$, tj.

$$1 = \sum_i (\cos\varphi(u,e_i))^2,$$

což je obvyklé tvrzení o směrových kosinech $\varphi(u,e_i)$ vektoru u.
Z definice odchylek vektorů nyní můžeme dovodit rozumné definice pro obecné podprostory v každém euklidovském vektorovém prostoru.

Definition

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V.
Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo
$\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\|u\| \|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Ukážeme v zápětí, že takové minimum skutečně vždy existuje.

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2).

Lemma

Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí

$$\cos\varphi(\langle v\rangle, U) = \cos\varphi(\langle v\rangle, \langle v_1\rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

Lemma

Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^{\perp}$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, U) = \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

Výpočet odchylek v obecných dimenzích je snadno spočitatelný pomocí výpočtu zkracování vlastních vektorů při dvou kolmých projekcí mezi prostory, odvodíme ve středu, viz texty k přednáškám.

Plán přednášky

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel
Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel

Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.

3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na daný podprostor.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel
Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.
3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na daný podprostor.
4. V $\mathcal{E}_3$ určete vzdálenost dvou přímek p, q.
Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p$, $B \in q$.
Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q.

1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$.
2. V $\mathcal{E}_2$ veďte bodem A přímku q svírající s danou přímkou p daný úhel
Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.
3. Spočtěte patu kolmice vedené bodem na daný podprostor.
4. V $\mathcal{E}_3$ určete vzdálenost dvou přímek p, q.
Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p$, $B \in q$. Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q.
5. V $\mathcal{E}_3$ najděte osu dvou mimoběžek p a q:
Nechť η je rovina generovaná jedním bodem $A \in p$ a součtem $Z(p) + (Z(p) + Z(q))^\perp$. Pak průnik $\eta \cap q$ spolu se zaměřením $(Z(p) + Z(q))^\perp$ dávají parametrický popis hledané osy. (Prověřte, kolik má úloha obecně řešení!)

Plán přednášky

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bazí $\mathcal{R}^n$.

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bazí $\mathcal{R}^n$.
Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{E}_n$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k; 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, jde o k–rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1 \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$. Pro dané vektory $u_1, \dots, u_k$ máme k dispozici také rovnoběžnostěny menších dimenzí

$$\mathcal{P}_1(A; u_1), \dots, \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)$$

v euklidovských podprostorech $A + \langle u_1 \rangle, \dots, A + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí
$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^{\perp} \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$.
Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_1(A; u_1) = \|u_1\|$$
$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \|e_k\| |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí
$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^{\perp} \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$.
Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_1(A; u_1) = \|u_1\|$$
$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \|e_k\| |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Je-li $u_1, \dots, u_n$ báze kompatibilní s orientací V, definujeme (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu
$\operatorname{Vol}\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$, v opačném případě klademe $\operatorname{Vol}\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = -|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$.

Theorem

Nechť $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ *je euklidovský podprostor a nechť* $(e_1, \dots, e_k)$ *je jeho ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory* $u_1, \dots, u_k \in Z(\mathcal{Q})$ *a* $A \in \mathcal{Q}$ *platí*

1. $$\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$
2. $$(\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

K důkazu se vrátíme ve středu, viz texty.