Matematika I – 12b
Euklidovská geometrie

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5. 12. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Abstraktní euklidovský prostor

Definition

Bodovým euklidovským prostorem $\mathcal{E}$ rozumíme afinní prostor, jehož zaměření je euklidovský vektorový prostor.
Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$. **Vzdálenost bodů** $A, B \in \mathcal{E}$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$.
Každá volba takové souřadné soustavy zadává ztotožnění $\mathcal{E}$ se standardním prostorem $\mathcal{E}_n$.
Euklidovské podprostory v $\mathcal{E}$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Theorem (jednoduché vlastnosti skalárních součinů)

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ *(**trojúhelníková nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \le \|u\| \, \|v\|$ *(**Cauchyova nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \ge |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$ *(**Besselova nerovnost**).*
4. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je* $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ *právě když* $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$ *(**Parsevalova rovnost**).*
5. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ a $u \in V$ je vektor $w = (u \cdot e_1)e_1 + \dots + (u \cdot e_k)e_k$ jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.*

Všechny důkazy spočívají v přímých výpočtech.

Theorem (jednoduché důsledky pro euklidovskou geometrii)

Pro body $A, B, C \in \mathcal{E}$ *platí*

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
2. $\rho(A, B) = 0$ *právě, když* $A = B$
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
4. *V každé kartézké souřadné soustavě* $(A_0; \underline{e})$ *mají body*

   $$A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

   vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$.
5. *Pro podprostory* $\mathcal{R}$ *a* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}$ *existují bod* $P \in \mathcal{Q}$ *a* $Q \in \mathcal{R}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$. *Vzdálenost bodů* Q *a* P *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ *pro libovolné body* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$.

Důkazy tvrzení

První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.

Důkazy tvrzení

První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.
Speciálním případem posledního bodu je tvrzení:

Je–li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Důkazy tvrzení

První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.
Speciálním případem posledního bodu je tvrzení:

Je–li dán bod A a podprostor $\mathcal{Q}$ v $\mathcal{E}_n$, pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů $\mathcal{Q}$ od A. Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.

Vektor $A - B$ se jednoznačně rozkládá na $A - B = u_1 + u_2$, $u_1 \in Z(\mathcal{Q})$, $u_2 \in Z(\mathcal{Q})^\perp$. Přitom u_2 nezávisí na volbě $B \in \mathcal{Q}$, $P = A + (-u_2) = B + u_1 \in \mathcal{Q}$ a $\|A - B\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|A - P\|$. Odtud již vyplývá, že minima je skutečně dosaženo, a to pro bod P. Vypočtená vzdálenost je skutečně $\|u_2\|$.
Obecný výsledek se dokáže zcela obdobně.

Plán přednášky

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos\varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.
Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \le \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \le 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u,v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos\varphi(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \le \varphi(u,v) \le 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1,0)$, $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ skutečně platí $\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.
Odchylka je nezávislá na velikostech a vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$.

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech $\mathcal{E}$ zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech.

Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

Definition

Odchylka $\varphi(u, v)$ **vektorů** $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ pro odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ skutečně platí $\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

Odchylka je nezávislá na velikostech a vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$.Ve vícerozměrných prostorech je odchylka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula).

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2(u\cdot v) = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\varphi(u,v).$$

To je tzv. **kosinová věta**.

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2(u\cdot v) = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\varphi(u,v).$$

To je tzv. **kosinová věta**.
Dále platí pro každou ortonormální bázi $\underline{e}$ a $u \in V$ vztah $\|u\|^2 = \sum_i |u \cdot e_i|^2$, tj.

$$1 = \sum_i (\cos\varphi(u, e_i))^2,$$

což je obvyklé tvrzení o směrových kosinech $\varphi(u, e_i)$ vektoru u.
Z definice odchylek vektorů nyní můžeme dovodit rozumné definice pro obecné podprostory v každém euklidovském vektorovém prostoru.

Definition

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V.
Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Ukážeme v zápětí, že takové minimum skutečně vždy existuje.

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definition (pokračování)

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2).

Lemma

Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v, tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, U) = \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

Výpočet odchylek v obecných dimenzích je snadno spočitatelný pomocí výpočtu zkracování vlastních vektorů při dvou kolmých projekcí mezi prostory, podrobnosti viz texty k přednáškám.

Plán přednášky

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bazí $\mathcal{R}^n$.

Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bazí $\mathcal{R}^n$. Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{E}_n$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k; 0 \leq c_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, jde o k–rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1 \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$. Pro dané vektory $u_1, \dots, u_k$ máme k dispozici také rovnoběžnostěny menších dimenzí

$$\mathcal{P}_1(A; u_1), \dots, \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)$$

v euklidovských podprostorech $A + \langle u_1 \rangle, \dots, A + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí
$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^{\perp} \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$.
Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_1(A; u_1) = \|u_1\|$$
$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \|e_k\| |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Jsou-li $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé definujeme objem $\operatorname{Vol} P_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí
$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^\perp \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$.
Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u_k' + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_1(A; u_1) = \|u_1\|$$
$$|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \|e_k\| |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Je-li $u_1, \dots, u_n$ báze kompatibilní s orientací V, definujeme (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu
$\operatorname{Vol}\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = |\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$, v opačném případě klademe $\operatorname{Vol}\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = -|\operatorname{Vol}|\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)$.

Theorem

Nechť $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ *je euklidovský podprostor a nechť* $(e_1, \dots, e_k)$ *je jeho ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory* $u_1, \dots, u_k \in Z(\mathcal{Q})$ *a* $A \in \mathcal{Q}$ *platí*

1. $$\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$
2. $$(\operatorname{Vol} \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

Podobnosti důkazu viz texty.

Determinant

$$\det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

se nazývá **Grammův determinant** k–tice vektorů $u_1, \dots, u_k$. V geometrické formulaci dostáváme jako velice důžitý důsledek následující tvrzení:

Corollary

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ euklidovského vektorového prostoru V je $\det \varphi$ roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}$ určeného libovolnými $\dim V$ vektory má objem roven $\det \varphi$–násobku původního objemu.

Determinant

$$\det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

se nazývá **Grammův determinant** k–tice vektorů $u_1, \dots, u_k$. V geometrické formulaci dostáváme jako velice důžitý důsledek následující tvrzení:

Corollary

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ euklidovského vektorového prostoru V je $\det \varphi$ roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}$ určeného libovolnými $\dim V$ vektory má objem roven $\det \varphi$–násobku původního objemu.

S determinantem a objemem rovnoběžnostěnů také úzce souvisí operace vektorového součinu a vnějšího součinu. Odkazujeme zde na texty.