Matematika I – 13a
Kvadriky

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10. 12. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Objekty v $\mathcal{E}_n$ lze zadávat i složitějšími rovnicemi než lineárními. Ty zadané kvadratickými rovnicemi, se jmenují **kvadriky**.

Objekty v $\mathcal{E}_n$ lze zadávat i složitějšími rovnicemi než lineárními. Ty zadané kvadratickými rovnicemi, se jmenují **kvadriky**.
Zvolme v $\mathcal{E}_n$ pevně kartézskou souřadnou soustavu (tj. bod a ortonormální bázi zaměření) a uvažme obecnou kvadratickou rovnici pro souřadnice $(x_1, \dots, x_n)$ bodů $A \in \mathcal{E}_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_i x_i + a = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Můžeme ji zapsat jako $f(u) + g(u) + a = 0$ pro kvadratickou formu f (tj. zúžení symetrické bilineární formy F na dvojice stejných argumentů), lineární formu g a skalár $a \in \mathbb{R}$ a předpokládáme že hodnost f je nenulová (jinak by se jednalo o lineární rovnici popisující euklidovský podprostor).

Začněme s kvadratickou částí, tj. bilineární symetrickou formou $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$.

Začněme s kvadratickou částí, tj. bilineární symetrickou formou $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Takovýmto zobrazením f říkáme **kvadratické formy** a výše uvedený vzorec pro hodnotu formy s použitím zvolených souřadnic se nazývá **analytický tvar** formy. Jestliže změníme bázi e_i na jinou bázi $e'_1, \dots, e'_n$, dostaneme pro stejný vektor jiné souřadnice $x = S \cdot x'$ a tedy

$$f(x) = (S \cdot x')^T \cdot A \cdot (S \cdot x') = (x')^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot x'.$$

Předchozí výpočet na prostoru se skalárním součinem můžeme shrnout: *matice bilineární formy F a tedy i kvadratické formy f se transformuje při změně souřadnic způsobem, který pro ortogonální změny souřadnic splývá s transformací matic zobrazení (skutečně, pak je $S^{-1} = S^T$)*:

Theorem

Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak vztah

$$\varphi \mapsto F, \quad F(u, u) = \langle \varphi(u), u \rangle$$

zadává bijekci mezi symetrickými lineárními zobrazeními a kvadratickými formami na V.

Euklidovská klasifikace kvadrik

Z poslední věty vyplývá okamžitý důsledek, že pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí). Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0.$$

Euklidovská klasifikace kvadrik

Z poslední věty vyplývá okamžitý důsledek, že pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí). Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0.$$

V dalším kroku pro souřadnice x_i s $\lambda_i \neq 0$ provedeme doplnění do čtverců, které „pohltí" kvadráty i lineární členy týchž neznámých (tzv. Lagrangeův algoritmus). Tak nám zůstanou nejvýše ty neznámé, pro které byl jejich koeficient u kvadrátu nulový, a získáme tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i)^2 + \sum_{j \text{ splňující } \lambda_j = 0} b_j x_j + c = 0.$$

Pokud nám opravdu zůstaly nějaké lineární členy, můžeme zvolit novou bázi zaměření tak, aby odpovídající lineární forma byla prvkem duální báze a novou volbou počátku v $\mathcal{E}_n$ pak dosáhneme výsledného tvaru

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + b y_{k+1} + c = 0,$$

kde k je hodnost kvadratické formy f. Lineární člen se může (ale nemusí) objevit jen, pokud je hodnost f menší než n, $c \in \mathbb{R}$ může být nenulové pouze, když je $b = 0$.

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině

Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině

Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Volbou vhodné báze zaměření a následným doplněním čtverců dosáhneme tvaru (opět používáme stejného značení x, y pro nové souřadnice):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

kde a_i může být nenulové pouze v případě, že a_{ii} je nulové.

Případ $\mathcal{E}_2$, tj. kuželosečky v rovině – pokračování

Posledním krokem obecného postupu, tj. v dimenzi $n = 2$ jen případnou volbou posunutí, dosáhneme právě jedné z rovnic:

$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$	prázdná množina
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$	elipsa
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$	hyperbola
$0 = x^2/a^2 - 2py$	parabola
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2$	bod
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2$	2 různoběžné přímky
$0 = x^2 - a^2$	2 rovnoběžné přímky
$0 = x^2$	2 splývající přímky
$0 = x^2 + a^2$	prázdná množina

Afinní pohled

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Afinní pohled

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Pochopitelně ale často potřebujeme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Afinní pohled

Geometrická formulace našeho popisu kvadrik je, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje **euklidovská transformace** na $\mathcal{E}_n$ (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Pochopitelně ale často potřebujeme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Ukážeme si hlavní rozdíl postupu na kvadratických formách.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T A x$ vzhledem ke zvolené bázi na V. Pro vektor $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme **polární báze** kvadratické formy f. Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T Ax$ vzhledem ke zvolené bázi na V. Pro vektor $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme **polární báze** kvadratické formy f. Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat. Existuje ale daleko jednodušší algoritmus, jak takovou polární bázi najít mezi všemi bazemi. Tím se zároveň dovíme podstatné informace o afinních vlastnostech kvadratických forem. Následující věta bývá v literatuře uváděna pod názvem **Lagrangeův algoritmus**.

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:

Lagrangeův algoritmus doplňování na čtverce

Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n, $f : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V získáme polární bázi pro f takto:
(1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots \\ &= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 \\ &\qquad + \text{členy neobsahující } x_1 \end{aligned}$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,\ x_2' = x_2, \dots, x_n' = x_n.$$

pokračování

To odpovídá nové bázi
$v_1 = a_{11}^{-1} u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1} a_{12} u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1} a_{1n} u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerání forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1} x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.

pokračování

To odpovídá nové bázi
$v_1 = a_{11}^{-1}u_1,\ v_2 = u_2 - a_{11}^{-1}a_{12}u_1, \ldots, v_n = u_n - a_{11}^{-1}a_{1n}u_1$ a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerání forma splňovat $g(v_1, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$. Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1}x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1.
Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x_1', zatímco v h se x_1' nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.
(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u $x_2'^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n - 1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i-tém kroku bude prvek a_{ii} dosud získané matice nulový.

pokračování

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.

pokračování

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i-tý prvek báze s j-tým a pokračovat podle předešlého postupu.
(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i$, $k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi neboť jsme již dosáhli diagonální matici. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x_k' = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak
$h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1).

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.

Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0.

Počty jedniček a mínus jedniček nazýváme **signaturou kvadratické formy**. Opět tedy dostáváme úplný popis kvadratických forem ve smyslu, že dvě takové formy jsou převoditelná jedna na druhou pomocí afinní transformace tehdy a jen tehdy, když mají stejnou signaturu:

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \dots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \cdots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \cdots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.
Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích právě, když mají stejnou hodnost a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

Při diskusi symetrických zobrazení jsme hovořili o definitních a semidefitních zobrazeních. Tatáž diskuse má jasný smysl i pro symetrické bilineární formy a kvadratické formy.

Kvadratickou formu f forma na reálném vektorovém prostoru V nazýváme

1. **positivně definitní**, je-li $f(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
2. **positivně semidefinitní**, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
3. **negativně definitní**, je-li $f(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
4. **negativně semidefinitní**, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
5. **indefinitní**, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Stejné názvy používáme i pro symetrické reálné matice, jsou-li maticemi patřičných kvadratických forem. Signaturou symetrické matice pak rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.