Matematika I – 1b
Skaláry, kombinatorické veličiny a diferenční rovnice

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 9. 2012

Obsah přednášky

1 Obecné informace

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, předběžné texty nové učebnice „Matematika drsně a svižně“, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Vlastnosti sčítání

Vyjmenujme takto obvyklé vlastnosti, které sčítání a násobení čísel má:

$$(a+b)+c = a+(b+c),\ \text{pro všechny } a, b, c \tag{KG1}$$

$$a+b = b+a,\ \text{pro všechny } a, b \tag{KG2}$$

$$\text{existuje prvek 0 tak, že pro všechny } a \text{ je } a+0=a \tag{KG3}$$

$$\text{pro všechny } a \text{ existuje } (-a) \text{ tak, že } \ a+(-a)=0. \tag{KG4}$$

Vlastnostem (KG1) – (KG4) říkáme vlastnosti **komutativní grupy**. Celá čísla $\mathbb{Z}$ jsou dobrým příkladem komutativní grupy, přirozená čísla nikoliv, protože nesplňují KG4 (a případně neobsahují nulu pokud ji do $\mathbb{N}$ nezahrnujeme).

Vlastnosti násobení

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pro všechny } a, b, c \tag{O1}$$
$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pro všechny } a, b \tag{O2}$$
$$\text{existuje prvek 1 takový, že pro vechny } a \text{ platí } 1 \cdot a = a \tag{O3}$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pro všechny } a, b, c. \tag{O4}$$

Poslední vlastnosti O4 se říká **distributivita**.
Množiny s operacemi $+$, $\cdot$ a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají **komutativní okruhy**. Potřebujeme však zpravidla ještě další běžnou vlastnost čísel:

$$\text{pro každé } a \neq 0 \text{ existuje } a^{-1} \text{ tak, že platí, } a \cdot a^{-1} = 1. \tag{P}$$

Kdy naše objekty splňují navíc i (P), hovoříme o **poli** (často také o **komutativním tělese**).

Někdy se ale setkáme se slabší dodatečnou vlastností ne je (P).
Např. okruh celých čísel $\mathbb{Z}$ nesplňuje (P), ale splňuje

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{buď } a = 0 \text{ nebo } b = 0. \tag{OI}$$

Hovoříme o **oboru integrity**.
Prvky nějaké mnoiny s operacemi $+$ a $\cdot$ splňujícími (ne nutně vechny) výe uvedené vlastnosti (tj. komutativní okruh, obor integrity, pole) budeme nazývat skaláry.
Příklady – okruhy zbytkových tříd!

Budeme pro ně vesměs užívat latinská písmena ze začátku abecedy.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n moností, dalí je volen z $n-1$ moností atd., a nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné mnoině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků mnoiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotoníme si S s mnoinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají monym pořadím čísel od jedné do n.
Dokázali jsme tak:
Počet různých pořadí na konečné množině s n prvky je dán funkcí faktoriál:

$$f(n) = n!$$

Kombinace

Pro počet **kombinací k-tého stupně** z n prvků platí (samozřejmě je $k \leq n$)

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Číslům $c(n,k)$ říkáme **binomická čísla**.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**.
Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro vechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Jako ukázku, jak vypadá matematický důkaz si odvoďme několik jednoduchých tvrzení o kombinačních číslech. Definujme $\binom{n}{k} = 0$, kdykoliv je buď $k < 0$ nebo $k > n$.
Pro vechna přirozená čísla k a n platí

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme **permutace s opakovaním**. Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, $\dots$, p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakováním budeme značit $P(p_1, \dots, p_k)$. Zřejmě platí:

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr prvků z n moností, včetně pořadí, nazýváme **variace k-tého stupně s opakováním**, jejich počet budeme značit $V(n,k)$. Předpokládáme,, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou. Zřejmě platí:

$$V(n,k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o **kombinacích s opakováním** a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$.

Theorem

Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro vechny $0 \leq k$ a $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}.$$

V předchozích odstavcích jsme viděli formule, které zadávaly hodnotu skalární funkce definované na přirozených číslech (faktoriál) nebo dvojicích čísel (binomická čísla) pomocí předcházejících hodnot. Tomu lze rozumět také tak, e místo hodnoty naí funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné. Např.

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}$$

říká, e rozdíl počtu moností, jak vybrat $k+1$ prvků z $n+1$ moností, je vyjádřitelný pomocí (moná ji známé) hodnoty.

Takto se skutečně velice často postupuje při matematické formulaci modelů, které popisují reálné systémy v ekonomice, biologii apod. My si tu povšimneme jen nejednodušších případů a budeme se k této tématice postupně vracet.

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel.

Je zřejmé, e takový vztah, spolu s volbou pro $f(0)$, zadává jednoznačně celou nekonečnou posloupnost hodnot $f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$. Jako příklad můe slouit definiční formule pro faktoriál, tj.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i na hodnotě $f(n)$.

lineární diferenční rovnice

Po konstantní závislosti je nejjednoduí

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde a, $b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

Obecně pro rovnice prvního řádu s proměnnými koeficienty platí

Theorem

Obecné řešení diferenční rovnice prvního řádu

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n$$

s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ *je dáno vztahem*

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r .$$

Vlastnosti prostoru řešení?

Corollary

Obecné řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $a \neq 1$, b a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

Důkaz.

Dosazením konstantních hodnot za a_i a b_i do obecné formule dostáváme první sčítanec okamitě.

Pro vyčíslení součtu součinů v druhém si je třeba vimnout, e se jedná o výrazy $(1 + a + \cdots + a^{n-1})b$. Sečtením této geometrické řady (připomeňme, e $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$) dostaneme právě poadovaný výsledek. $\square$

Obecně nazýváme **diferenční rovnicí řádu** k vztah

$$f(n+k) = F(n, f(n), \dots, f(n+k-1)) = 0,$$

kde F je známá skalární funkce v $k+1$ proměnných skalárních veličinách. Celá poslounost hodnot je jednoznačně určena volbou k-tice čísel $f(0), \dots, f(k-1)$.
Lineární diferenční rovnicí druhého řádu rozumíme

$$f(n+2) = a \cdot f(n+1) + b \cdot f(n) + c,$$

kde a, b, c jsou známé skalární koeficienty. Dobře známým příkladem s $c = 0$ je např. Fibonacciho posloupnost čísel.

Zkusme dosadit do rovnice podobné řeení jako u lineárních, tj. $f(n) = \lambda^n$ pro nějaké skalární λ. Dosazením dostáváme

$$\lambda^{n+2} - a\lambda^{n+1} - b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - a\lambda - b) = 0$$

a odtud vidíme, e buď je $\lambda = 0$ nebo

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Protože součet dvou řešení rovnice $f(n+2) - a \cdot f(n+1) - b \cdot f(n) = 0$ je opět řešením téže rovnice a totéž platí pro konstatní násobky řešení, odvodili jsme obecné řešení $f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ a pro jednoznačné vyřeení konkrétní úlohy se zadanými počátečními hodnotami $f(0)$ a $f(1)$ nám zbývá jen najít příslušné konstanty C_1 a C_2.