Matematika I – 2a
Konečná pravděpodobnost

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24. 9. 2012

Obsah přednášky

Viděli jsme už funkce, jejichž hodnoty byly dány formulí nebo popisem změny hodnoty v závislosti na změnách závislé proměnné. Další obvyklý případ – sledované hodnoty jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.
Nejbanálnější příklad: házení kostkou s šesti stranami s označeními $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Matematický model takového házení „poctivou" kostkou předepisuje, že každá ze stran padá stejně často.
Pro konkrétní kostku je ale jisté, že skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné. Z velikého počtu pokusů lze usoudit na relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů a tyto ustanovit jako pravděpodobnosti v našem matematickém popisu.
Nicméně při sebevětším počtu pokusů nemůžeme vyloučit možnost, že se náhodou povedla velice nepravděpodobná kombinace výsledků a že se tím náš matematický model skutečnosti stal (pro tento konkrétní případ) nedobrým.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.
Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný **jev**.
Často se setkáváme s případy, kdy ne všechny podmnožiny mohou nastávat, hovoříme pak o **jevovém poli** $\mathcal{A}$. Požadujeme přitom:

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor, je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení.

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny A, $B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Pro naše házení kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jevové pole je tvořeno všemi podmnožinami. Např. náhodný jev $\{1, 3, 5\}$ pak interpretujeme jako „padne liché číslo".

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá **opačný jev k jevu** A, píšeme $B = A^c$.

Definition (Klasická konečná pravděpodobnost)

Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω. **Klasická pravděpodobnost** je takový pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Takto definovaná skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ má vlastnosti vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.
Additivnost platí pro jakýkoliv konečný počet neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, tj.

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i), \text{ kdykoliv je } A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j \in I.$$

Podívejme se, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné elementární jevy na vhodně definovaném jevovém poli. Budeme pozorovat součty při hodu více kostkami.
Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěmi kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b), tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$.
Pokud se budeme ptát po dvou pětkách, je tedy pravděpodobnost poloviční než u dvou různých hodnot bez uvedení pořadí. Pro jednotlivé možné součty uvedené v horním řádku nám vychází počet možností v řádku dolním:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Obecně je sčítání pravděpodobností pro výskyty jevů složitější. Problém totiž je, že pokud jsou jevy slučitelné, částečně máme v součtu pravděpodobností započteny příznivé výskyty vícekrát. Nejjednodušší je si nejprve představit situci se dvěma slučitelnými jevy A, B. Uvažme nejprve klasickou pravděpodobnost, kde jde vlastně o počítání prvků v podmnožinách. Pravděpodobnost výskytu alespoň jednoho z nich, tj. pravděpodobnost jejich sjednocení, je dána vztahem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{1}$$

protože ty prvky, které patří do množiny A i B, jsme nejprve započetli dvakrát a tak je musíme jednou odečíst.
Obdobně postupujeme u více množin a u obecné konečné pravděpodobnosti.
Na úrovni mohutností množin jde o klasický princip **inkluze a exkluze**.

Příklad chaotického asistenta

Asistent má poslat tři obálky na tři adresáty, provede to ale náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden adresát dostane svůj dopis?

Spočteme si pravděpodobnost opačného jevu. Úlohu můžeme sformulovat tak, že hledáme pořadí čísel 1, 2 a 3 takové aby žádné číslo i nebylo právě na i-tém místě. Na první pohled vidíme, že takové jsou dvě: 321, 312.

Spočteme totéž pomocí inkluze a exkluze: označíme M_i množinu pořadí, které mají na i-tém místě i. Pak počet hledaných pořadí je

$$\begin{aligned} d &= 3! - |M_1 \cup M_2 \cup M_3| \\ &= 3! - |M_1| - |M_2| - |M_3| + \\ &\quad |M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3| - |M_1 \cap M_2 \cap M_3| \\ &= 6 - 2 - 2 - 2 + 1 + 1 + 1 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Opačný jev má tedy pravděpodobnost $2/6 = 1/3$, hledaná pravděpodobnost je tedy $2/3$.

Definition

Nezávislé jevy Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a v něm nějaké jevy $A_1, \dots, A_k$. Řekneme, že tyto jevy jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, $1 \le \ell \le k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystém stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý. Dále si pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B spočtěme

$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Odtud už snadno dovodíme, že záměnou jednoho nebo více stochasticky nezávislých jevů za jejich opačné jevy obdržíme opět stochasticky nezávislé jevy.

Často se hledá pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze stochasticky nezávislých jevů, tzn. hledáme $P(A_1 \cup \cdots \cup A_k)$. Můžeme pak použít elementární vlastnosti množinových operací, tzv. de Morganova pravidla,

$$A_1 \cup \cdots \cup A_k = (A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c)^c$$

a dostáváme:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c) = 1 - (1 - P(A_1)) \ldots (1 - P(A_k)).$$

Uvažme rovinu $\mathbb{R}^2$ dvojic reálných čísel a v ní podmnožinu Ω se známým obsahem $\operatorname{vol}\Omega$ (symbol „vol“ od anglického „volume“, tj. obsah/objem). Příkladem může sloužit třeba jednotkový čtverec. Náhodné jevy budou reprezentovány podmnožinami $A \subset \Omega$ za jevové pole $\mathcal{A}$ bereme systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah. Třeba všechna konečná sjednocení trojůhelníků. Nastoupení nebo nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω, kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A. Podobně jako u klasické pravděpodobnosti pak definujeme pravděpodobnostní funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$P(A) = \frac{\operatorname{vol} A}{\operatorname{vol}\Omega}.$$

Uvažme jako příklad problém, kdy náhodně vyberem dvě hodnoty $a < b$ v intervalu $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Všechny hodnoty a i b jsou stejně pravděpodobné a otázka zní „jaká je pravděpodobnost, že interval (a,b) bude mít velikost alespoň jedna polovina?“.
Odpověď je docela jednoduchá: volba čísel a, b je volbou libovolného bodu (a,b) ve vnitřku trojúhelníku Ω s hraničními vrcholy $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$ (načrtněte si obrázek!). Potřebujeme znát plochu podmnožiny, která odpovídá bodům s $b > a + \frac{1}{2}$, tj. vnitřku trojúhelníku A ohraničeného vrcholy $[0,\frac{1}{2}]$, $[0,1]$, $[\frac{1}{2},1]$. Evidentně dostáváme $P(A) = \frac{1}{4}$.
Zkuste si samostatně odpovědět na otázku „pro jakou požadovanou minimální délku intervalu (a,b) dostaneme pravděpodobnost jedna polovina?“.