Matematika I – 3b
Geometrie v rovině

Jan Slovák

Masarykova univerzita, Fakulta informatiky

3. 10. 2012

Obsah přednášky

Přiřazení F, které respektuje operace sčítání a násobení s vektory a skaláry nazýváme lineární zobrazení (zobrazuje přímky na přímky nebo body):

$$F(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot F(v) + b \cdot F(w)$$

pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$.
Vždy můžeme zapisovat taková zobrazení pomocí **matic** a jejich násobení, které definujeme takto:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Podobně, místo vektoru v zprava násobíme jinou maticí B stejného rozměru jako je A. Prostě aplikujeme předchozí formule po jednotlivých sloupcích matice B a obrdržíme jako výsledek opět matice.
Snadno ověříme tzv. asociativitu násobení:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Stejně snadno je vidět i distributivita $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, neplatí však komutativita a existují „dělitelé nuly“. Např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zajímavé je podívat se, kdy existuje inverze.
Poznáme to pomocí vztahu

$$ad - bc = 0.$$

Výrazu $ad - bc = 0$ říkáme **determinant** matice A a píšeme pro něj $\det A = ad - bc$, případně

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Jestliže k výsledku lineárního zobrazení ještě dovolíme přičíst pevný vektor $T = (w, z)$, tj. naše zobrazení bude

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot v + T = \begin{pmatrix} ax + by + w \\ cx + dy + z \end{pmatrix},$$

máme popsána právě všechna tzv. **afinní zobrazení roviny** do sebe. Známými příklady jsou všechny afinní podobnosti. Lineární zobrazení pak odpovídají těm afinním zobrazením, které zachovávají pevný bod O.
Jak tedy vypadají transformace souřadnic a jejich inverze?

V rovině máme definovánu velikost vektorů a vzdálenost bodů.
Definujeme také pojem úhel vektorů.
V pozadí je koncept **skalární součin**. Pro vektory $v = (v_x, v_y)$, $w = (w_x, w_y)$

$$v_x w_x + v_y w_y$$

Pak

$$\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v \cdot v.$$

Úhel φ dvou vektorů v, w vyjadřujeme pomocí funkce $\cos\varphi$, která je dána hodnotou reálné první souřadnice jednotkového vektoru, jehož úhel s vektorem $(1, 0)$ je φ. Zjevně je pak druhá souřadnice takového vektoru dána reálnou hodnotou $0 \le \sin\varphi \le 1$ splňující $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$.

Obecně pak pro dva vektory v a w popisujeme jejich úhel pomocí souřadnic $v = (v_x, v_y)$, $w = (w_x, w_y)$ takto:

$$\cos\varphi = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Příkladem lineárního zobrazení, které zachovává velikosti, je rotace o předem daný úhel ψ. Je dána formulí s maticí R_ψ:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R_\psi \cdot v = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplikací na jednotkový vektor $(1, 0)$ dostáváme skutečně právě očekávaný výsledek $(\cos\psi, \sin\psi)$.

Rotaci kolem jiného bodu $P = O + w$, snadno napíšeme formulí s pomocí translací:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= v \mapsto v - w \mapsto R_\psi \cdot (v - w) \\ &\mapsto R_\psi \cdot (v - w) + w \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi(x - w_x) - \sin\psi(y - w_y) + w_x \\ \sin\psi(x - w_x) + \cos\psi(y - w_y) + w_y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dalším příkladem je tzv. **zrcadlení vzhledem k přímce**. Opět nám stačí popsat zrcadlení vzhledem k přímkám procházejícím počátkem O a ostatní se z nich odvodí pomocí translací. Hledáme matici Z_ψ zrcadlení vzhledem k přímce s jednotkovým směrovým vektorem v svírajícím úhel ψ s vektorem $(1, 0)$. Např.

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a obecně můžeme psát (otočíme do „nulové" polohy, odzrcadlíme a vrátíme zpět)

$$Z_\psi = R_\psi \cdot Z_0 \cdot R_{-\psi}.$$

Díky asociativitě násobení matic spočteme:

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si nyní

$$Z_\psi \cdot Z_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}.$$

To lze zformulovat jako

Theorem

Otočení o úhel ψ obdržíme následným provedením dvou zrcadlení vzhledem ke směrům, které spolu svírají úhel $\frac{1}{2}\psi$.

Tvrzení lze také odvodit ryze geometrickou úvahou. Pak náš výpočet dokazuje právě standardní formule pro goniometrické funkce dvojnásobného úhlu, které jsme po cestě použili.

Hlubší je následující rekapitulace předchozích úvah:

Theorem

Lineární zobrazení euklidovské roviny je složeno ze zrcadlení právě, když je dáno maticí R splňující

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ab + cd = 0, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1.$$

To nastane právě, když toto zobrazení zachovává velikosti. Otočením je přitom právě tehdy, když je determinant matice R roven jedné, což odpovídá sudému počtu zrcadlení. Při lichém počtu zdrcadlení je determinant roven -1.

Obsah trojúhelníka

Závěrem našeho malého výletu do geometrie se zaměřme na pojem obsah. Trojúhelník je vymezen dvojicí vektorů v a w, které přiloženy do počátku O zadají zbylé dva vrcholy. Chtěli bychom tedy najít formuli (skalární funkci vol), která dvěma vektorům přiřadí číslo rovné obsahu $\operatorname{vol}\Delta(v,w)$ takto definovaného trojúhelníku $\Delta(v,w)$. Ze zadání je vidět, že by mělo platit

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\Delta(v+v',w) &= \operatorname{vol}\Delta(v,w)+\operatorname{vol}\Delta(v',w)\\ \operatorname{vol}\Delta(av,w) &= a\operatorname{vol}\Delta(v,w)\end{aligned}$$

a přidejme požadavek

$$\operatorname{vol}\Delta(v,w) = -\operatorname{vol}\Delta(w,v),$$

který odpovídá představě, že opatříme plochu znaménkem podle toho, v jakém pořadí bereme vektory.

Pokud vektory v a w napíšeme do sloupců matice A, pak

$$A = (v, w) \mapsto \det A$$

splňuje všechny tři naše požadavky. Kolik takových zobrazení ale může být?
Každý vektor umíme vyjádřit pomocí dvou souřadných vektorů $v = (1, 0)$ a $w = (0, 1)$ a evidentně tedy každá možnost pro $\operatorname{vol} \Delta$ je jednoznačně určena už vyčíslením na této jediné dvojici argumentů (v, w). Jsou si tedy všechny možnosti rovny až na skalární násobek. Ten umíme určit požadavkem

$$\operatorname{vol} \Delta((1, 0), (1, 0)) = \frac{1}{2},$$

tj. volíme **orientaci** a **měřítko**.
Vidíme tedy, že determinant zadává plochu rovnoběžnostěnu určeného sloupci matice A (a plocha trojúhelníku je tedy poloviční).

Předchozí popis hodnot pro orientovaný objem nám dává do rukou elegantní nástroj pro určování viditelnosti orientovaných úseček. Orientovanou úsečkou rozumíme dva body v rovině $\mathbb{R}^2$ s určením pořadím. Můžeme si ji představovat jako šipku od prvého k druhému bodu. Taková orientovaná úsečka nám rozděluje rovinu na dvě poloroviny, říkejme jim „levou“ a „pravou“.
Jestliže uvažujeme obvyklou orientaci „proti směru hodinových ručiček“ pro hranici mnohoúhelníku, pak pozorovatel nalevo od orientované úsečky (tj. uvnitř takového mnohoúhelníka) tuto vidí a naopak pozorovatel napravo ji nevidí. Má tedy smysl ptát se, jestli je orientovaná úsečka $[A, B]$ v rovině viditelná z bodu C.

Spočtěme orientovanou plochu příslušného trojúhelníku zadaného vektory $A - C$ a $B - C$. Pokud jsme s bodem C nalevo od úsečky, pak při naší orientaci bude vektor $A - C$ dříve než ten druhý a proto výsledná plocha (tj. hodnota determinantu) bude kladná. To odpovídá situaci, kdy úsečku vidíme. Naopak, při opačné poloze bude výsledkem záporná hodnota determinantu a podle zjistíme, že úsečku nevidíme.
Uvedený jednoduchý postup je často využíván pro testování polohy při standardních úlohách v 2D grafice.