Matematika I – 5b
Vektory, matice, determinanty

Jan Slovák

Masarykova univerzita, Fakulta informatiky

17. 10. 2011

Obsah přednášky

Definition

Symbolem $\mathbb{K}$ budeme nadále značit nějakou množinu skalárů. Prozatím budeme **vektorem** rozumět uspořádanou n-tici skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat **dimenzí**.
Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme) a násobení vektoru $u = (a_1, \dots, a_n)$ skalárem b definujeme tak, že každý prvek n-tice u vynásobíme skalárem b (skaláry v $\mathbb{K}$ násobit umíme), tj.

$$u + v = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$
$$b \cdot u = b \cdot (a_1, \dots, a_n) = (b \cdot a_1, \dots, b \cdot a_n).$$

Zpravidla jsou skaláry z pole, případně z oboru integrity.

Theorem

Pro všechny vektory v, $w \in \mathbb{K}^n$ a skaláry a, $b \in \mathbb{K}$ platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Důkaz.

Pro kterékoliv pole skalárů $\mathbb{K}$ se vlastnosti (V1)–(V4) snadno ověří pro každý prostor $\mathbb{K}^n$, protože při ověřování vždy používáme pouze vlastnosti skalárů. □

Budeme takto pracovat např. s $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $(\mathbb{Z}_k)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Všimněme si také, že k ověření vlastností (V1)–(V4) potřebujeme pro použité skaláry pouze vlastnosti okruhu. Vlastnost (P) však bude přesto podstatná později.

Definition

Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Theorem

Předpisy pro $A + B$, $a \cdot A$, $-A$, 0 *zadávají na množině všech matic typu* m/n *operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).*

Theorem

Pro libovolný okruh skalárů je na množině všech čtvercových matic dimenze n definována operace násobení. Splňuje vlastnosti (O1) a (O3) vzhledem k jednotkové matici $E = (\delta_{ij})$. Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje (O4). Obecně však neplatí (O2) ani (OI), zejména tedy neplatí (P).

Při důkazu předchozího tvrzení není podstatný stejný počet řádků a sloupců, kromě samotné existence operace násobení pro všechny dvojice matice. Příslušné vlastnosti proto platí obecněji:

Theorem

Násobení matic je asociativní a distributivní, tj. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, *kdykoliv jsou tato násobení definována. Jednotková matice je neutrálním prvkem pro násobení zleva i zprava.*

Z hlediska řešení systémů rovnic

$$A \cdot x = b$$

je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory b, které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Uvedeme si jednoduché manipulace s řádky rovnic a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému.

Takovým operacím říkáme **řádkové elementární transformace**. Jsou to:

- záměna dvou řádků
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
- přičtení řádku k jinému řádku.

Je zjevné, že odpovídající operace na úrovni rovnic v systému nemohou změnit množinu všech jeho řešení.

Sloupcové elementární transformace matic jsou

- záměna dvou sloupců
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
- přičtení sloupce k jinému sloupci,

Tyto operace však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné. Později budeme vidět, že sloupcové elementární transformace vedou k řešení téhož systému ale v transformovaných souřadnicích.
Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postup je algoritmický a většinou se mu říká **Gausova eliminace** proměnných.

Theorem

Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) ***schodovitý tvar****:*

- *Je-li $a_{ij} = 0$ a všechny předchozí prvky na i-tém řádku jsou také nulové, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$*
- *je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-ním řádku, pak $a_{ij} = 0$.*

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

realizace pomocí elementárních matic

Všimněme si, že elementární řádkové (resp. sloupcové) transformace odpovídají vynásobením zleva (resp. zprava) následujícími maticemi:

- Přehození i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

realizace pomocí elementárních matic

- Vynásobení i-tého řádku (resp. sloupce) skalárem a:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

realizace pomocí elementárních matic

- Sečtení i-tého řádku (resp. sloupce) s j-tým:

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix}$$

Toto prostinké pozorování je ve skutečnosti velice podstatné, protože součin invertibilních matic je invertibilní a všechny elementární transformace jsou nad polem skalárů invertibilní. Pro libovolnou matici A tedy dostaneme násobením vhodnou invertibilní maticí $P = P_k \cdots P_1$ zleva (postupné násobení k maticemi zleva) její ekvivalentní řádkový schodovitý tvar $A' = P \cdot A$.
Jestliže obecně aplikujeme tentýž eliminační postup na sloupce, dostaneme z každé matice B její sloucový schodovitý tvar B' vynásobením vhodnou invertibilní maticí $Q = Q_1 \cdots Q_\ell$. Pokud ale začneme s maticí $B = A'$ v řádkově schodovitém tvaru, eliminuje takový postup pouze všechny dosud nenulové prvky mimo diagonálu matice a závěrem lze ještě i tyto elementárními operacemi změnit na jedničky. Celkem jsme tedy ověřili důležitý výsledek, ke kterému se budeme mnohokrát vracet:

Theorem

Pro každou matici A typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$ existují čtvercové invertibilní matice P dimenze m a Q dimenze n takové, že matice $P \cdot A$ je v řádkově schodovitém tvaru a

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Algoritmus pro výpočet inverzní matice

V předchozích úvahách jsme se dostali prakticky k úplnému algoritmu pro výpočet inverzní matice. Během jednoduchého níže uvedeného postupu buď zjistíme, že inverze neexistuje, nebo bude inverze spočtena. I nadále pracujeme nad polem skalárů. Ekvivalentní řádkové transformace se čtvercovou maticí A dimenze n vedou k matici P' takové, že $P' \cdot A$ bude v řádkově schodovitém tvaru. Přitom může (ale nemusí) být jeden nebo více posledních řádků nulových. Jestliže má existovat inverzní matice k A, pak existuje i inverzní matice k $P' \cdot A$. Jestliže však je poslední řádek v $P \cdot A$ nulový, bude nulový i poslední řádek v $P \cdot A \cdot B$ pro jakoukoliv matici B dimenze n. Existence takového nulového řádku ve výsledku (řádkové) Gaussovy eliminace tedy vylučuje existenci A^{-1}.

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího, nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E. Jinými slovy, najdeme další invertibilní matici P'' takovou, že pro $P = P'' \cdot P'$ platí $P \cdot A = E$. Výměnou řádkových a sloupcových transformací lze za předpokladu existence A^{-1} stejným postupem najít Q takovou, že $A \cdot Q = E$. Odtud

$$P = P \cdot E = P \cdot (A \cdot Q) = (P \cdot A) \cdot Q = Q.$$

To ale znamená, že jsme nalezli hledanou inverzní matici $A^{-1} = P = Q$ k A.

V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme **lineární kombinace**. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme později, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1 u_{i_1} + \cdots + a_k u_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A. Jestliže existuje lineární kombinace daných řádků s alespoň jedním nenulovým skalárním koeficientem, jejímž výsledkem je nulový řádek, říkáme, že jsou **lineárně závislé**. V opačném případě, tj. když jedinou možnost jak získat nulový řádek je vynásobení výhradně nulovými skaláry, jsou **lineárně nezávislé**. Obdobně definujeme lineárně závislé a nezávislé sloupce matice.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových „schodů“ v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Theorem

Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Matice A má stejný počet $h(A)$ linárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména je hodnost vždy nejvýše rovna menšímu z rozměrů matice A.

Algoritmus pro výpočet inverzních matic také říká, že čtvercová matice A dimenze m má inverzi právě, když je její hodnost rovna počtu řádků m.

Obecně, nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad $\mathbb{K}$.
Determinant matice A je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$ a znaménko sgn pro každou permutaci ještě musíme popsat.
Každý z výrazů $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme **člen determinantu** $|A|$.

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří **inverzi v permutaci** σ, je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat. Z následujícího tvrzení už je jasně vidět, že Saarusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Theorem

Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací a každá transpozice mění paritu.

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.
Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \to X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta), \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n na skaláry z $\mathbb{K}$ definujeme **matici transponovanou** k A. Jde o matici $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ typu n/m.
Čtvercová matice A s vlastností $A = A^T$ se nazývá **symetrická**. Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá antisymetrická.

Theorem

Pro každou čtvercovou matici A platí

1. $|A^T| = |A|$,
2. *Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z* $\mathbb{K}$, *pak* $|A| = 0$,
3. *Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak* $|A| = -|B|$,
4. *Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem* $a \in \mathbb{K}$, *pak* $|B| = a|A|$,
5. *Jsou-li prvky k-tého řádku v A tvaru* $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ *a všechny ostatní řádky v maticích* A, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ *jsou stejné, pak* $|A| = |B| + |C|$,
6. *Determinant* $|A|$ *se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.*

Důsledkem prvního tvrzení předchozí věty o rovnosti determinantů matice a matice transponované je, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat i pro přičítání lineárních kombinací ostatních sloupců k vybranému.
Vlastnosti (3)–(5) říkají, že determinant jako zobrazení, které n vektorům dimenze n (řádkům nebo sloupcům matice) přiřadí skalár je antisymetrické zobrazení lineární v každém svém argumentu, přesně jak jsme podle analogie z dimenze 2 požadovali.

Pro matici v řádkovém nebo sloupcovém schodovitém tvaru je jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci. Vidíme tedy, že determinant takové matice je $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody.

Theorem (Cauchyova věta)

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice dimenze n nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$. Pak $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Časem uvidíme, že skutečně stejně jako v dimenzi dva je determinant matice roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného jejími sloupci. Uvidíme časem také, že když uvážíme zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ zadané čtvercovou maticí A na $\mathbb{R}^n$, pak můžeme determinant této matice vidět jako vyjádření poměru mezi objemem rovnoběžnostěnů daných vektory $x_1, \dots x_n$ a jejich obrazy $A \cdot x_1, \dots, A \cdot x_n$. Protože skládání zobrazení $x \mapsto A \cdot x \mapsto B \cdot (A \cdot x)$ odpovídá násobení matic, je **Cauchyova věta** snad docela pochopitelná.
My tuto větu odvodíme ryze algebraicky jako docela jednoduchý důsledek tzv. Laplaceovy věty o rozvoji. Ta bude vyžadovat něco málo přípravy.

Definition (Minory a algebraické doplňky matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix}$$

typu k/ℓ nazýváme **submaticí matice** A určenou řádky $i_1, \ldots, i_k$ a sloupci $j_1, \ldots, j_\ell$.
Zbývajícími $(m-k)$ řádky a $(n-l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m-k)/(n-\ell)$, která se nazývá **doplňková submatice** k M v A. Při $k = \ell$ je definován $|M|$, který nazýváme **subdeterminant** nebo **minor** řádu k matice A.

Definition (Minory a algebraické doplňky matice - pokračování)

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A. Skalár

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá **algebraický doplněk** k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají **hlavní submatice**, jejich determinanty **hlavní minory** matice A.
Při speciální volbě $k = \ell = 1$, $m = n$ hovoříme o **algebraickém doplňku** A_{ij} prvku a_{ij} matice A.

Lemma

Nechť A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.

Toto tvrzení už podbízí představu, že by se pomocí takových součinů menších determinantů skutečně mohl determinant matic vyjadřovat. Víme, že $|A|$ obsahuje právě $n!$ různých členů, právě jeden pro každou permutaci. Tyto členy jsou navzájem různé jakožto polynomy v prvcích (neznámé obecné) matice A, přitom lze pro každý z členů zvolit matici A takovou, že pouze tento člen bude nenulový.
Uvažované součiny $|M| \cdot |M^*|$ obsahují právě $n!$ různých členů z $|A|$ a proto takto musí být vyjádřen právě $\det A$.

Tím jsme naznačili důkaz věty:

Theorem (Laplaceova věta)

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad libovolným okruhem skalárů a nechť je pevně zvoleno k jejích řádků. Pak $|A|$ je součet všech $\binom{n}{k}$ součinů $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ minorů řádu k vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceova věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká **Laplaceův rozvoj** podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i-tého řádku nebo i-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij}. Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

Důkaz Cauchyovy věty $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Uvažme matici H dimenze $2n$ (používáme tzv. blokovou symboliku, tj. píšeme matici jakoby složenou z matic)

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} =$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme

$$|H| = |A| \cdot |B|.$$

Důkaz Cauchyovy věty $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Nyní budeme k posledním n sloupcům H postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi matici s nulami v pravém dolním rohu. Dostaneme

$$K = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy

$$|H| = |K| = (-1)^{n+1+\cdots+2n}|A \cdot B| = (-1)^{2n\cdot(n+1)} \cdot |A \cdot B| = |A \cdot B|.$$

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A, tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A. Nazýváme ji **algebraicky adjungovaná matice** k matici A.

Theorem

Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ platí

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

1. *A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ právě, když $|A|^{-1}$ existuje v $\mathbb{K}$.*
2. *Pokud existuje A^{-1}, pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.*