Uvažujme systém m lineárních rovnic pro n proměnných a předpokládejme, že jde o rovnice tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Díky vlastnosti distributivity pro násobení matic je okamžitě zřejmé, že součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením. Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$.

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$. Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a „dimenze" tohoto prostoru určitě nemá být n (pokud matice systému není nulová).
Potřebujeme proto obecnější definici vektorového prostoru a jeho dimenze.

Vektorové (pod)prostory

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou jsou splněny axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$
$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$
$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Budeme sice pracovat pouze s podmnožinami $V \subset \mathbb{R}^n$ majícími všechny vlasti vektorových prostorů, podstatné ale pro nás budou pouze následující vlastnosti, které lze také odvodit z abstraktní definice vektorového prostoru:

Theorem

Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$, dále uvažme $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, vektory $u, v, u_j \in V$. Potom

1. $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$
2. $(-1) \cdot u = -u$
3. $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
4. $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
5. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot u_j$.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.
Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.
Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Přímo z definic plyne, že každá podmnožina lineárně nezávislé množiny M je lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že $M \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v M je lineárně nezávislá.

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **vektorovým podprostorem** jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in M,\ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. pro $m = 2$, jsou vektory $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$ plyne $a = b = 0$. Dále, vektory $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé! Nad $\mathbb{R}$ tedy tyto dva vektory „generují" jednorozměrný podprostor, zatímco nad $\mathbb{Q}$ je dvourozměrný.

Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \leq n \leq \infty$. Podprostory jsou např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy ($f(-x) = \pm f(x)$).
Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo všech zobrazení $M \to V$ libovolné pevně zvolené množiny M do vektorového prostoru V.

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechť W_i, $i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V, $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \cap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \cap_{i \in I} W_i$. Zejména je tedy podprostorem průnik všech podprostorů $W \subset V$, které obsahují předem danou množinu vektorů $M \subset V$. Říkáme, že takto M **generuje** podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou **generátory** podprostoru $\langle M \rangle$.

Theorem

Pro každou podmnožinu $M \subset V$ platí

1. $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k;\ k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \ldots, k\}$
2. $M = \langle M \rangle$ *právě když* M *je vektorový podprostor*
3. *jestliže* $N \subset M$ *pak* $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$ *je vektorový podprostor*
4. $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset V$, *triviální podprostor.*

Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$, nazýváme **součtem podprostorů** V_i. Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \dots, V_k \subset V$,

$$V_1 + \dots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \rangle.$$

Viděli jsme, že každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů V_i. Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru a pro konečný součet k podprostorů tak dostáváme

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + \dots + v_k;\; v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Součet $W = V_1 + \cdots + V_k \subset V$ se nazývá **přímý součet** podprostorů, jsou-li průniky všech dvojic triviální, tj. $V_i \cap V_j = \{0\}$ pro všechny $i \neq j$. V takovém případě lze každý vektor $w \in W$ napsat právě jedním způsobem jako součet

$$w = v_1 + \cdots + v_k,$$

kde $v_i \in V_i$. Pro přímé součty píšeme

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \oplus_{i=1}^{k} V_i.$$

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V[1]. Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$. Bázi k-rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k-tici $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ bázových vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.
Zjevně, je-li $(v_1, \dots, v_n)$ bazí V, je celý prostor V přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle.$$

[1] Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou"bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Intuitivně lze jistě věřit následujícímu tvrzení. S přesným důkazem (ukazujícím, proč je k tomu třeba vlastností pole skalárů se vrátíme v rozšířené přednášce). Pro vektory coby n–tice skalárů je možné i formálně ověřit postupy, které jsme potkali u Gausovy eliminace minule.

Theorem

Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.

Zapamatujme si:

Vlastnosti bazí

1. Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.
2. Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.
3. Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny
4. Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů

Theorem

Nechť $W, W_1, W_2 \subset V$ jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí

1. $\dim W \leq \dim V$
2. $V = W$ *právě když* $\dim V = \dim W$
3. $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

Když je množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi $(v_1, \dots, v_n)$ se nazývají **souřadnice vektoru** v v této bázi.

Přiřazení, které vektoru $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$, budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \to \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:[2]

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w);\ \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u);\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.

[2] Všimněme si, že operace na levých a pravých stranách těchto rovnic nejsou totožné, naopak, jde o operace na různých vektorových prostorech! Při této příležitosti se také můžeme zamyslet nad obecným případem báze M (možná nekonečněrozměrného) prostoru V. Báze pak nemusí být spočetná, pořád ale ještě můžeme definovat zobrazení $\underline{M} : V \to \mathbb{K}^M$ (tj. souřadnice vektoru jsou zobrazení z M do $\mathbb{K}$).

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v),\ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u),\ \forall a \in \mathbb{K},\ \forall u \in V.$

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

s maticí typu m/n nad $\mathbb{K}$.
Je tomu i naopak – v souřadnicích je každé lineární zobrazení dané pomocí násobení vhodnou maticí:

Uvažujme libovolné vektorové prostory V, W nad $\mathbb{K}$ s $\dim V = n$, $\dim W = m$ a mějme lineární zobrazení $f : V \to W$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ na W, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$. Odtud přímo vidíme, že $f_{\underline{u},\underline{v}}$ je dáno jako násobení maticí, do jejíchž sloupců jsou vepsány souřadnice hodnot zobrazení $f(u_i)$ v bázi $\underline{v}$.

Jestliže za V i W zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za f identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze $\underline{u}$ v souřadnicích vzhledem k $\underline{v}$. Označme výslednou matici T. Když pak zadáme vektor u

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k $\underline{u}$ a dosadíme za u_i, obdržíme souřadné vyjádření $\bar{x}$ téhož vektoru v bázi $\underline{v}$. Stačí k tomu přeskládat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít $\bar{x} = T \cdot x$. Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$. Matice T zadávající transformaci souřadnic z báze $\underline{u}$ do báze $\underline{v}$ je tedy maticí identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_V)_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Theorem

Matici T přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice T.

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice x vektoru v bázi $\underline{u}$, pak jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$ se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze $\underline{v}$ k bázi $\underline{u}$.

V geometrii roviny jsem již pracovali nejen s bázemi a lineárními zobrazeními, ale také s velikostí vektorů a jejich úhly. Pro zavedení těchto pojmů jsme použili souřadného vyjádření pro velikost $v = (x, y)$:

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zatímco úhel φ dvou vektorů $v = (x, y)$ a $v' = (x', y')$ byl dán

$$\cos\varphi = \frac{xx' + yy'}{\|v\|\|v'\|}.$$

Povšimněme si, že výraz v čitateli posledního výrazu je lineární v každém ze svých argumentů, značíme jej $\langle v, v' \rangle$ a říkáme mu skalární součin vektorů v a v'. Skalární součin je také symetrický ve svých argumentech a platí

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Zejména platí, že $\|v\| = 0$ právě, když $v = 0$. Z našich úvah je také vidět, že v Euklidovské rovině jsou dva vektory kolmé právě, když je jejich skalární součin nulový. Zobecníme si tento postup pro libovolné (zatím konečné) dimenze.

Lineární a multilineární formy

Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. **lineární formy**. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ do skalárů $\mathbb{K}$. Jsou-li dány souřadnice na V, je přiřazení jednotlivé i-té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou. Při pevně zvolené bázi $\{1\}$ na $\mathbb{K}$ jsou s každou volbou báze na V lineární formy ztotožněny s maticemi typu $1/n$, tj. s řádky. Vyčíslení takové formy na vektoru je pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru se sloupcem souřadnic.

Množina všech lineárních forem na daném prostoru V je opět vektorový prostor, značíme jej V^*. Pokud je V konečněrozměrný, je V^* izomorfní prostoru V. Realizace takového izomorfismu je dána např. volbou tzv. **duální báze** k zvolené bázi na V, jejímiž prvky α_i jsou právě formy zadávající i-tou souřadnici.
Podobně budeme pracovat i se zobrazeními ze součinu k kopií vektorového prostoru V do skalárů lineárních v každém argumentu. Hovoříme o k-**lineárních** formách. Budeme se setkávat (a již jsme je viděli v dimenzi 2) zejména s n-lineárními antisymetrickými formami (formy objemu) a symetrickými bilineárními formami.

Definition

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad reálnými čísly je bilineární symetrická forma $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ taková, že $\langle v, v\rangle \geq 0$ a je roven nule pouze při $v = 0$.

Pro skalární součin se často používá také obvyklé tečky, tj. $\langle u, v\rangle = u \cdot v$. Z kontextu je pak třeba poznat, zda jde o součin dvou vektorů (tedy výsledkem je skalár) nebo něco jiného.

Definition

Vektory v a $w \in V$ se nazývají **ortogonální**, jestliže $\langle v, w \rangle = 0$. Vektor v se nazývá **normovaný**, jestliže $\|v\| = 1$. Báze prostoru V složená z ortogonálních vektorů se nazývá **ortogonální báze**. Jsou-li bázové vektory navíc i normované, je to **ortonormální báze**.

Úhel φ dvou vektorů v a w je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Theorem

Skalární součin je v každé ortonormální bázi dán výrazem

$$\langle x, y\rangle = x^T \cdot y.$$

V obecné bázi V existuje symetrická matice S taková, že

$$\langle x, y\rangle = x^T \cdot S \cdot y.$$

Existence ortonormální báze

Přímočaré početní využití kolmých projekcí vede k tzv. **Grammovu–Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu**. Cílem procedury je z dané posloupnosti nenulových generátorů $v_1, \dots, v_k$ konečněrozměrného prostoru V vytvořit ortogonální množinu nenulových generátorů pro V.

Začneme prvním (nenulovým) vektorem v_1 a spočteme kolmou projekci v_2 do

$$\langle v_1 \rangle^{\perp} \subset \langle \{v_1, v_2\} \rangle.$$

Výsledek bude nenulový právě, když je v_2 nezávislé na v_1. Ve všech dalších krocích budeme postupovat obdobně.

V ℓ-tém kroku tedy chceme, aby pro $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$ platilo $\langle v_{\ell+1}, v_i \rangle = 0$, pro všechny $i = 1, \dots, \ell$. Odtud plyne

$$0 = \langle u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, v_i \rangle = \langle u_{\ell+1}, v_i \rangle + a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

a je vidět, že vektory s požadovanými vlastnostmi jsou určeny jednoznačně až na násobek.

Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

Theorem

Nechť $(u_1, \dots, u_k)$ *je lineárně nezávislá* k*-tice vektorů prostoru* V *se skalárním součinem. Pak existuje ortogonální systém vektorů* $(v_1, \dots, v_k)$ *takový, že* $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. *Získáme je následující procedurou:*

- *Z nezávislosti vektorů* u_i *plyne* $u_1 \neq 0$. *Položíme* $v_1 = u_1$.
- *Máme-li již vektory* $v_1, \dots, v_\ell$ *potřebných vlastností klademe*

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle u_{\ell+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Kdykoliv máme ortogonální bázi vektorového prostoru V, stačí vektory vynormovat a získáme bázi ortonormální. Dokázali jsme proto také:

Corollary

Na každém vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

V ortonormální bázi se obzvlášť snadno spočtou souřadnice a kolmé projekce. Skutečně, mějme ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru V. Pak každý vektor $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ splňuje

$$\langle e_i, v\rangle = \langle e_i, x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\rangle = x_i$$

a platí tedy vždy

$$v = \langle e_1, v\rangle e_1 + \cdots + \langle e_n, v\rangle e_n.$$

Pokud máme zadán podprostor $W \subset V$ a jeho ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_k)$, jde ji jistě doplnit na ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$ celého V. Kolmá projekce obecného vektoru $v \in V$ do W pak bude dána vztahem

$$v \mapsto \langle e_1, v\rangle e_1 + \dots + \langle e_n, v\rangle e_k.$$

Pro kolmou projekci nám tedy stačí znát jen ortonormání bázi podprostoru W, na nejž promítáme.
Povšimněme si také, že obecně jsou projekce f na podprostor W podél U a projekce g na U podél W svázány vztahem $g = \mathrm{id}_V - f$. Je tedy u kolmých projekcí na daný podprostor W vždy výhodnější počítat ortonormální bázi toho z dvojice W, $W^\perp$, který má menší dimenzi.