Matematika I – 6b
A znovu vektory složitěji

Jan Slovák

Masarykova univerzita, Fakulta informatiky

24. 10. 2012

Plán přednášky

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou platí axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou platí axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Theorem

Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$, dále uvažme $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, vektory $u, v, u_j \in V$. Potom

1. $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$
2. $(-1) \cdot u = -u$
3. $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
4. $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
5. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot u_j.$

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.
Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.
Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.
Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **vektorovým podprostorem** jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in M,\ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Příklady vektorových (pod)prostorů

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. vektory $(1,0),(\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1,0) = (\sqrt{2},0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé!

Příklady vektorových (pod)prostorů

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. vektory $(1,0),(\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1,0) = (\sqrt{2},0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé!
Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$.
Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$.

Příklady vektorových (pod)prostorů

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. vektory $(1,0),(\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2}\cdot(1,0) = (\sqrt{2},0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé!
Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$.
Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(a\cdot f)(x) = a\cdot f(x)$.
Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \le n \le \infty$.
Obdobně pro množiny řešení lineárních diferenčních rovnic atd.

Příklady vektorových (pod)prostorů

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. vektory $(1,0), (\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1,0) = (\sqrt{2},0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé!
Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$.
Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$.
Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \le n \le \infty$.
Obdobně pro množiny řešení lineárních diferenčních rovnic atd.
Podprostory jsou např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy $(f(-x) = \pm f(x))$, po částech konstantní funkce apod.
Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo všech zobrazení $M \to V$ libovolné pevně zvolené množiny M do vektorového prostoru V.

Generátory vektorového prostoru

Průnik všech podprostorů $W \subset V$, které obsahují předem danou množinu vektorů $M \subset V$ je podprostor. Říkáme, že takto M **generuje** podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou **generátory** podprostoru $\langle M \rangle$.

Theorem

Pro každou podmnožinu $M \subset V$ platí

1. $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k;\ k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \ldots, k\}$
2. $M = \langle M \rangle$ *právě když M je vektorový podprostor*
3. *jestliže $N \subset M$ pak $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$ je vektorový podprostor*
4. $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset V$, *triviální podprostor.*

Plán přednášky

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V
Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**.
Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$.

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V

Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**.

Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$.

Bázi k-rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k-tici $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ bázových vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.

Zjevně, je-li $(v_1, \dots, v_n)$ bazí V, je celý prostor V přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle.$$

Theorem

Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.

Silnější tvrzení je **Steinitzova větu o výměně**, která říká, že pro každou konečnou bázi a každý systém lineárně nezávislých vektorů ve V umíme najít podmnožinu bázových vektorů, které záměnou za zadané nové vektory dají opět bázi.

Důsledky Steinitzovy věty o výměně

Corollary

1. *Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.*
2. *Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.*
3. *Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny*
4. *Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů*

Theorem

Nechť $W, W_1, W_2 \subset V$ *jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí*

1. $\dim W \leq \dim V$
2. $V = W$ *právě když* $\dim V = \dim W$
3. $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

Plán přednášky

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V.$

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V.$

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

s maticí typu m/n nad $\mathbb{K}$.

Obraz Im$f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro lineárního zobrazení** f. Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

Obraz $\mathbf{Im} f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro lineárního zobrazení** f. Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

Theorem

Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Pro všechny $u, u_1, \ldots, u_k \in V$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

1. $f(0) = 0$
2. $f(-u) = -f(u)$
3. $f(a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \cdots + a_k \cdot f(u_k)$
4. *pro každý vektorový podprostor $V_1 \subset V$ je jeho obraz $f(V_1)$ vektorový podprostor ve W.*
5. *Pro každý podprostor $W_1 \subset W$ je množina $f^{-1}(W_1) = \{v \in V;\ f(v) \in W_1\}$ vektorový podprostor ve V.*

Jednoduché důsledky

1. Složení $g \circ f : V \to Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \to W$ a $g : W \to Z$ je opět lineární zobrazení.
2. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je izomorfismus právě když $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{0\} \subset V$. Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.
3. Pro podprostory V_1, V_2 a lineární zobrazení $f : V \to W$ platí $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$, $f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2)$.
4. Zobrazení "přiřazení souřadnic" $\underline{u} : V \to \mathbb{K}^n$ dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru V je izomorfismus.
5. Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
6. Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

Uvažujme libovolné vektorové prostory V, W nad $\mathbb{K}$ s $\dim V = n$, $\dim W = m$ a mějme lineární zobrazení $f : V \to W$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ na W, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$. Odtud přímo vidíme, že $f_{\underline{u},\underline{v}}$ je dáno jako násobení maticí, do jejíchž sloupců jsou vepsány souřadnice hodnot zobrazení $f(u_i)$ v bázi $\underline{v}$.

Jestliže za V i W zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za f identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze $\underline{u}$ v souřadnicích vzhledem k $\underline{v}$. Označme výslednou matici T. Když pak zadáme vektor u

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k $\underline{u}$ a dosadíme za u_i, obdržíme souřadné vyjádření $\bar{x}$ téhož vektoru v bázi $\underline{v}$. Stačí k tomu přeskládat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít $\bar{x} = T \cdot x$. Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$. Matice T zadávající transformaci souřadnic z báze $\underline{u}$ do báze $\underline{v}$ je tedy maticí identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[d, "\underline{v}", "\simeq"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_V)_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Theorem

Matici T přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice T.

Theorem

Matici T přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice T.

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice x vektoru v bázi $\underline{u}$, pak jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$ se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze $\underline{v}$ k bázi $\underline{u}$.

Nyní snadno vidíme, jak se skládají souřadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor Z nad $\mathbb{K}$ dimenze k s bází $\underline{w}$, lineární zobrazení $g : W \to Z$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v},\underline{w}}$. Pro matice těchto zobrazení dostáváme čímž jsme odvodili:

$$g_{\underline{v},\underline{w}} \circ f_{\underline{u},\underline{v}}(x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u},\underline{w}}(x)$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Všimněte si, že isomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{w}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{w}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Ve speciálním případě lineárního zobrazení $f : V \to V$ vyjadřujeme zpravidla f pomocí jedné báze $\underline{u}$ prostoru V, to je přechod k nové bázi $\underline{u}'$ bude znamenat změnu na $A' = T^{-1}AT$.

Plán přednášky

Lineární a multilineární formy

Budeme se teď chvíli zabývat vektorovými prostory nad skaláry $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Na komplexních číslech máme operace konjugace, $z \mapsto \bar{z}$. Zúžení této operace na $\mathbb{R}$ je identita.
Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. **lineární formy**. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ do skalárů $\mathbb{K}$. Jsou-li dány souřadnice na V, je přiřazení jednotlivé i-té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou.

Lineární a multilineární formy

Budeme se teď chvíli zabývat vektorovými prostory nad skaláry $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Na komplexních číslech máme operace konjugace, $z \mapsto \bar{z}$. Zúžení této operace na $\mathbb{R}$ je identita.
Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. **lineární formy**. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ do skalárů $\mathbb{K}$. Jsou-li dány souřadnice na V, je přiřazení jednotlivé i-té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou.
Při pevně zvolené bázi $\{1\}$ na $\mathbb{K}$ jsou s každou volbou báze na V lineární formy ztotožněny s maticemi typu $1/n$, tj. s řádky. Vyčíslení takové formy na vektoru je pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru se sloupcem souřadnic.

Lineární a multilineární formy

Budeme se teď chvíli zabývat vektorovými prostory nad skaláry $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Na komplexních číslech máme operace konjugace, $z \mapsto \bar{z}$. Zúžení této operace na $\mathbb{R}$ je identita.
Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. **lineární formy**. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ do skalárů $\mathbb{K}$. Jsou-li dány souřadnice na V, je přiřazení jednotlivé i-té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou.
Při pevně zvolené bázi $\{1\}$ na $\mathbb{K}$ jsou s každou volbou báze na V lineární formy ztotožněny s maticemi typu $1/n$, tj. s řádky. Vyčíslení takové formy na vektoru je pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru se sloupcem souřadnic.
Nad komplexními čísly budeme ještě potřebovat tzv. pololineární (nebo sesquilineární) formy, tj. takové f, které jsou aditivní a $f(az) = \bar{a}z$. Je zjevné, že v souřadnicích bude taková forma dána vynásobením řádku pevných skalárů s opruhovaným sloupcem souřadnic z.

Duální báze

Množina všech lineárních forem na daném prostoru V je opět vektorový prostor, značíme jej V^*. Pokud je V konečněrozměrný, je V^* izomorfní prostoru V. Realizace takového izomorfismu je dána např. volbou tzv. **duální báze** k zvolené bázi na V, jejímiž prvky α_i jsou právě formy zadávající i-tou souřadnici.
Podobně budeme pracovat i se zobrazeními ze součinu k kopií vektorového prostoru V do skalárů lineárních v každém argumentu. Hovoříme o k-**lineárních** formách. Budeme se setkávat (a již jsme je viděli v dimenzi 2) zejména s n-lineárními antisymetrickými formami (formy objemu) a symetrickými bilineárními formami.

Definition

Unitární prostor V je vektorový prostor nad komplexními čísly, spolu s formou $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ takovou, že

1. $\langle\ ,\ \rangle$ je lineární v prvním argumentu
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
3. $\langle v, v\rangle \geq 0$ a je roven nule pouze při $v = 0$.

Této formě se také říká skalární součin.

Je tedy zjevně skalární součin sesquilineární v druhém argumentu.

Definition

Vektory v a $w \in V$ se nazývají **ortogonální**, jestliže $\langle v, w \rangle = 0$. Vektor v se nazývá **normovaný**, jestliže $\|v\| = 1$. Báze prostoru V složená z ortogonálních vektorů se nazývá **ortogonální báze**. Jsou-li bázové vektory navíc i normované, je to **ortonormální báze**.

Theorem

Skalární součin je v každé ortonormální bázi na unitárním prostoru dán výrazem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot \bar{y}.$$

V obecné bázi V existuje matice S taková, že $S^T = \bar{S}$ a

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot S \cdot \bar{y}.$$

Grammova–Schmidtova ortogonalizace funguje zcela stejně i pro unitární prostory, proto opět vždy existují ortonormální báze.

Unitární a ortogonální zobrazení

Lineární zobrazení f zachovávající skalární součin, tj.

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

se v případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nazývá **unitární**, v reálném případě **ortogonální**.

Unitární a ortogonální zobrazení

Lineární zobrazení f zachovávající skalární součin, tj.

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$

se v případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nazývá **unitární**, v reálném případě **ortogonální**.
V ortogonální bázi platí, že $f : V \to V$ je unitární (ortogonální), právě když jeho matice A splňuje

$$A^{-1} = \bar{A}^T =: A^*,$$

tj. inverzní maticí je matice **adjungovaná**.

Symetrická a samoadjungovaná zobrazení

Zobrazení $f : V \to V$ splňující

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$$

se nazývá samoadjungované (resp. symetrické v reálném případě).

Duální prostory a zobrazení

Zvolme pevně jeden vektor $v \in V$, a dosaďme jej za druhý argument ve skalárním součinu:

$$V \ni v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}),$$

tj. zobrazení $V \to V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$. Nedegenerovanosti skalárního součinu zaručuje, že je to bijekce. Je vidět, že vektory ortonormální báze jsou zobrazeny na formy tvořící bázi duální.

Duální prostory a zobrazení

Zvolme pevně jeden vektor $v \in V$, a dosaďme jej za druhý argument ve skalárním součinu:

$$V \ni v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}),$$

tj. zobrazení $V \to V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$. Nedegenerovanosti skalárního součinu zaručuje, že je to bijekce. Je vidět, že vektory ortonormální báze jsou zobrazeny na formy tvořící bázi duální.
Každé lineární $f : V \to W$ (na libovolných vektorových prostorech nad týmiž skaláry) zadává tzv. duální zobrazení $f^* : W^* \to V^*$ mezi formami, definované pro všechny $w^* \in W^*$, $v \in V$

$$f^*(w^*)(v) = w^*(f(v)).$$

V duálních bazích pak tentýž definiční vztah má tvar (píšeme A^* pro matici zobrazení f^*, x^T souřadnice formy w^*, y souřadnice v)

$$(A^* x^T) \cdot y = x^T \cdot (A \cdot y)$$

a proto duální zobrazení má v duálních bazích matici A^T.

V případě unitárních vektorových prostorů převádí výše uvedené bijekce duální zobrazení f^* na tobrazení $f^* : W \to V$ zadané formulí

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$$

a tomuto zobrazení se říká **adjungované zobrazení** k f. Předchozí výpočet v souřadnicích pro symetrická zobrazení nám ve skutečnosti sdělil, že je-li A matice zobrazení f v ortonormální bázi, pak matice adjungovaného zobrazení f^* je matice transponovaná A^T.
Můžeme proto také přeformulovat definici takto:
Symetrické/samoadjungované je takové zobrazení $f : V \to V$, které je rovno svému adjungovanému zobrazení f^*. Často se takovým zobrazením také proto říká **samoadjungovaná**.