Plán přednášky

1. Matice lineárních zobrazení
2. Vlastní čísla zobrazení a matic

Připomenutí definic a pojmů

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V.$

Připomenutí definic a pojmů

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V.$

V souřadnicích jde o násobení maticí $A = f_{\underline{u},\underline{v}}$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$. Odtud přímo vidíme, že $f_{\underline{u},\underline{v}}$ je dáno jako násobení maticí, do jejíchž sloupců jsou vepsány souřadnice hodnot zobrazení $f(u_i)$ v bázi $\underline{v}$.

Příklad

Vektor $w = (3,2,1)$ má ve standardní bázi $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ souřadnice

$$[w]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zatímco v bázi $\mathbf{u} = \big((1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\big)$ má w souřadnice

$$[w]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

protože $w = (3,2,1) = 1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,0,0)$.
Všimněte si, že když říkáme vektor $w = (3,2,1)$, tak tím vlastně automaticky myslíme tento vektor vztažený ke standardní bázi $\mathbf{e}$.

Skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení matic. Snadno proto vidíme, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy $A = f_{\underline{u},\underline{v}}$ původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení matic. Snadno proto vidíme, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & W \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}'"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy $A = f_{\underline{u},\underline{v}}$ původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.
Ve speciálním případě lineární transformace $f : V \to V$ vyjadřujeme zpravidla f pomocí jedné báze $\underline{u}$ prostoru V, tzn. že přechod k nové bázi $\underline{u}'$ bude znamenat změnu na $A' = T^{-1}AT$.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x, y)) = a \cdot (x, y)$.

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím `http://www.wiley.com/legacy/products/subject/life/biological_anthropology/0471205079_virtual_reconstruction/chapter5_trafo.html`.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x,y)) = a \cdot (x,y)$.
2. Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L((x,y)) = (-y,x)$.

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím http://www.wiley.com/legacy/products/subject/life/biological_anthropology/0471205079_virtual_reconstruction/chapter5_trafo.html.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x,y)) = a \cdot (x,y)$.
2. Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L((x,y)) = (-y,x)$.
3. Obecněji, rotace o úhel φ v kladném smyslu[a]

$$L((x,y)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím http://www.wiley.com/legacy/products/subject/life/biological_anthropology/0471205079_virtual_reconstruction/chapter5_trafo.html.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x, y)) = a \cdot (x, y)$.
2. Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L((x, y)) = (-y, x)$.
3. Obecněji, rotace o úhel φ v kladném smyslu[a]

$$L((x, y)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Projekce vektoru na některou souřadnou osu, např. $L((x, y)) = y \cdot e_2 = (0, y)$.

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím `http://www.wiley.com/legacy/products/subject/life/biological_anthropology/0471205079_virtual_reconstruction/chapter5_trafo.html`.

Příklad

Jako příklad skládání lineárních transformací $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uveďme složení dvou rotací. Jak jsme dříve ukázali, rotace o úhel φ v kladném smyslu je (ve standardní bázi) reprezentována maticí

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

podobně pro matici A_ψ rotace o úhel ψ.

Příklad

Jako příklad skládání lineárních transformací $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uveďme složení dvou rotací. Jak jsme dříve ukázali, rotace o úhel φ v kladném smyslu je (ve standardní bázi) reprezentována maticí

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

podobně pro matici A_ψ rotace o úhel ψ.
Jejich složení (v libovolném pořadí) zřejmě odpovídá rotaci o úhel $\varphi + \psi$, proto

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Odtud mj. dostáváme platnost známých součtových vzorců pro goniometrické funkce.

Příklad

Nechť $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je pro dáno předpisem:

$$L(u) = x_1\, v_1 + (x_3 - x_2)\, v_2,$$

kde $u = (x_1, x_2, x_3)^T$, $v_1 = (2, -1)^T$, $v_2 = (1, -2)^T$. Určete matici A, která reprezentuje toto lineární zobrazení

(a) v bázích $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ a $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ (standardní báze prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$),

(b) v bázích $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

Řešení

a) Protože je

$$L(u) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix},$$

je $\quad L(e_1) = (2,-1)^T, \quad L(e_2) = (-1,2)^T, \quad L(e_3) = (1,-2)^T.$
Protože ve standardní bázi **e** cílového prostoru $\mathbb{R}^2$ je $w = [w]_{\mathbf{e}}$, je maticová reprezentace zobrazení L v těchto bázích

$$A = A_{\mathbf{e},\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

tj.

$$L(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Řešení

b) Protože je $L(e_1) = (2, -1)^T = v_1$,
$L(e_2) = (-1, 2)^T = -v_2$, $\quad L(e_3) = (1, -2)^T = v_2$, je
$[L(e_1)]_{\mathbf{v}} = (1, 0)^T$, $\quad [L(e_2)]_{\mathbf{v}} = (0, -1)^T$, $\quad [L(e_3)]_{\mathbf{v}} = (0, 1)^T$, je
maticová reprezentace zobrazení L v těchto bázích

$$B = B_{\mathbf{e},\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. } [L(u)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad

V části b) předchozího příkladu je matice přechodu of báze $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ k bázi $\mathbf{e}$ (v cílovém prostoru $\mathbb{R}^2$) rovna

$$V = \begin{pmatrix} [v_1]_\mathbf{e} & [v_2]_\mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{proto } V^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

Příklad

V části b) předchozího příkladu je matice přechodu of báze $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ k bázi $\mathbf{e}$ (v cílovém prostoru $\mathbb{R}^2$) rovna

$$V = \begin{pmatrix}[v_1]_{\mathbf{e}} & [v_2]_{\mathbf{e}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},$$

$$\text{proto } V^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

a je tedy matice uvažovaného lineárního zobrazení v bázích **e** a **v** rovna

$$B = V^{-1}\cdot A\cdot E_3 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Základní příklady zobrazení a jejich matic

Budeme zkoumat různé typy lineárních zobrazení. Tak se dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

Ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$ uvažujme následující matice zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Základní příklady zobrazení a jejich matic

Budeme zkoumat různé typy lineárních zobrazení. Tak se dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

Ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$ uvažujme následující matice zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A zadává kolmou projekci podél podprostoru $W \subset \{(0, a);\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ na podprostor $V \subset \{(a, 0);\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
Evidentně pro toto zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy $f|_{\operatorname{Im} f}$ je identické zobrazení. Jádrem f je právě podprostor W.

Matice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f. Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.

Matice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f. Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.
Matice C zadává zobrazení f, které první vektor báze zvětší a–krát, druhý b–krát. Tady se nám tedy celá rovina rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením f zachovány a ve kterých jde o pouhou **homotetii** (stejnolehlost), tj. roztažení skalárním násobkem. Např. volba $a = 1$, $b = -1$ odpovídá komplexní konjugaci $x + iy \mapsto x - iy$ na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení reálného vektorového prostoru, nikoliv však jednorozměrného komplexního prostoru $\mathbb{C}$. V geometrii roviny jde o zrcadlení podle osy x.

Matice D je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi. Jako pro každé lineární zobrazení, které je bijekcí, umíme najít báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice E (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na začátku i konci. Zkusme však uvažovat matici D jako matici zobrazení $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Pak umíme najít vektory $u = (i, 1)$, $v = (1, i)$, pro které bude platit

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot u, \; g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi (u, v) na $\mathbb{C}^2$ má g matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice C má na diagonále prvky $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$ a komplexně sdružený $\bar{a}$.

Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení. Navíc, můžeme si označit reálnou a imaginární část vektoru u takto

$$u = x_u + iy_u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zúžení komplexního zobrazení g na reálný vektorový podprostor generovaný vektory x_u a iy_u (tj. násobení komplexní jednotkou i) je právě otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

Plán přednášky

Klíčem k popisu zobrazení v předchozích příkladech byly odpovědi na otázku:

„jaké jsou vektory splňující rovnici $f(u) = a \cdot u$?“

pro nějaké skaláry a.

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} A \cdot u &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot u, \\ A \cdot v &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v. \end{aligned}$$

Jsou tedy $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$ vlastní hodnoty matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory u (pro $\lambda_1 = -1$) a v (pro $\lambda_2 = 2$).

Příklad

Uvažujme matici B a vektory u a v, kde

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 3i \end{pmatrix}.$$

Příklad

Uvažujme matici B a vektory u a v, kde

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} B \cdot u &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} = (-2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \\ B \cdot v &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} = (-2-3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad

Uvažujme matici B a vektory u a v, kde

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} B \cdot u &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} = (-2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \\ B \cdot v &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} = (-2-3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jsou tedy $\lambda_1 = -2+3i$ a $\lambda_2 = -2-3i$ vlastní hodnoty matice B a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory u (pro $\lambda_1 = -2+3i$) a v (pro $\lambda_2 = -2-3i$).

Zvolme tedy pevně lineární zobrazní $f : V \to V$ na vektorovém prostoru dimenze n nad skaláry $\mathbb{K}$. Jestliže si představíme takovou rovnost zapsanou v souřadnicích, tj. s využitím matice zobrazení A v nějakých bazích, jde o výraz

$$A \cdot x - a \cdot x = (A - a \cdot E) \cdot x = 0.$$

Z předchozího víme, že taková soustava rovnic má jediné řešení $x = 0$, pokud je matice $A - aE$ invertibilní. My tedy chceme najít takové hodnoty $a \in \mathbb{K}$, pro které naopak $A - aE$ invertibilní není.

Nutnou a dostatečnou podmínkou pro existenci $a \in \mathbb{K}$ s vlastností $A \cdot x = a \cdot x$ (pro nenulový vektor x) je

$$\det(A - a \cdot E) = 0.$$

Nutnou a dostatečnou podmínkou pro existenci $a \in \mathbb{K}$ s vlastností $A \cdot x = a \cdot x$ (pro nenulový vektor x) je

$$\det(A - a \cdot E) = 0.$$

Jestliže považujeme $\lambda = a$ za proměnnou v předchozí skalární rovnici, hledáme ve skutečnosti kořeny polynomu stupně n. Jak jsme viděli v případě matice D výše, kořeny mohou, ale nemusí existovat podle volby pole skalárů $\mathbb{K}$.

Definice

Skaláry vyhovující rovnici $f(u) = a \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme **vlastní čísla (hodnoty) zobrazení** f (eigenvalues), příslušné vektory u pak **vlastní vektory zobrazení** f (eigenvectors).

Definice

Skaláry vyhovující rovnici $f(u) = a \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme **vlastní čísla (hodnoty) zobrazení** f (eigenvalues), příslušné vektory u pak **vlastní vektory zobrazení** f (eigenvectors).

Z definice vlastních čísel je zřejmé, že jejich výpočet nemůže záviset na volbě báze a tedy matice zobrazení f. Skutečně, jako přímý důsledek trasformačních vlastností a Cauchyovy věty pro výpočet determinantu součinu dostáváme jinou volbou souřadnic (podobnou) matici $A' = P^{-1}AP$ s invertibilní maticí P a

$$|P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}||(A - \lambda E)||P| = |A - \lambda E|,$$

protože násobení skalárů je komutativní a $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

Poznámka

Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Poznámka

Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Podobně, jsou-li u, v vlastní vektory matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také jejich součet vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A(u+v) = (Au) + (Av) = (\lambda\,u) + (\lambda\,v) = \lambda\,(u+v).$$

Vlastní vektory příslušející téže vlastní hodnotě tedy tvoří (společně s nulovým vektorem) **podprostor** vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. To také zdůvodňuje terminologii „vlastní prostor“.

Příklad

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ z předchozího příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-1) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathrm{Eigen}(2) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle.$$

Příklad

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ z předchozího příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-1) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathrm{Eigen}(2) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) Pro matici $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$ z předchozího příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-2+3i) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathrm{Eigen}(-2-3i) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} \rangle.$$

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$|A - \lambda\, E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2,$$

a proto je $\lambda_1 = 2$ (násobnosti 2) jediná vlastní hodnota této matice.
Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1\, E \,|\, 0) = (A - 2\, E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení (pokr.)

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Volbou volné proměnné $x_1 = t$ dostaneme řešení $(t, 0) = t \cdot (1, 0)$, tj. vlastní vektor a příslušný vlastní prostor jsou

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Eigen}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Obdobnou terminologii používáme i pro matice.

Definice

Pro matici A dimenze n nad $\mathbb{K}$ nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ **charakteristický polynom matice** A. Kořeny tohoto polynomu jsou **vlastní hodnoty matice** A. Je-li A matice zobrazení $f : V \to V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také *charakteristický polynom zobrazení* f.

Obdobnou terminologii používáme i pro matice.

Definice

Pro matici A dimenze n nad $\mathbb{K}$ nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ **charakteristický polynom matice** A. Kořeny tohoto polynomu jsou **vlastní hodnoty matice** A. Je-li A matice zobrazení $f : V \to V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také *charakteristický polynom zobrazení* f.

Protože je charakteristický polynom zobrazení $f : V \to V$ nezávislý na volbě báze V, $\dim V = n$, jsou i jeho koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné λ skaláry vyjadřující vlastnosti zobrazení f, tj. nemohou záviset na naší volbě báze. Zejména je snadné vyjádřit koeficienty u nejvyšších a nejnižších mocnin:

$$|A-\lambda\cdot E| = (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+|A|\cdot\lambda^0$$

Součet diagonálních členů matice se nazývá **stopa matice**, značíme ji TrA, **stopa zobrazení** je definována jako stopa jeho matice v libovolné bázi.

Věta

Vlastní vektory lineárního zobrazení $f : V \to V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Věta

Vlastní vektory lineárního zobrazení $f : V \to V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Důsledek

Jestliže existuje n navzájem různých kořenů a_i charakteristického polynomu zobrazení $f : V \to V$, $\dim V = n$, pak existuje rozklad V na přímý součet vlastních podprostorů dimenze 1. To znamená, že existuje báze V složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má f diagonální matici (s vlastními čísly na diagonále). Příslušnou bázi (vyjádřenou v souřadnicích vzhledem k libovolně zvolené bázi V) obdržíme řešením n systémů homogenních lineárních rovnic o n neznámých s maticemi $(A - a_i \cdot E)$, kde A je matice f ve zvolené bázi.

Příklad

Určete matici osové souměrnosti v $\mathbb{R}^2$ podle přímky procházející počátkem a bodem $[3, 1]$, ve vhodné bázi a určete vlastní čísla a vlastní vektory této transformace.