Matematika I – 8b
Jordanův tvar matic (dokončení)
problém lineárního programování

Jan Slovák

Masarykova univerzita

7. 11. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Nilpotentní a cyklická zobrazení – připomenutí

Definition

Lineární zobrazení $f : V \to V$ se nazývá **nilpotentní**, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že iterované zobrazení f^k je identicky nulové. Nejmenší číslo k s touto vlastností se nazývá *stupněm nilpotentnosti* zobrazení f. Zobrazení $f : V \to V$ se nazývá **cyklické**, jestliže existuje báze $(u_1, \ldots, u_n)$ prostoru V taková, že $f(u_1) = 0$ a $f(u_i) = u_{i-1}$ pro všechna $i = 2, \ldots, n$.

Jinými slovy, matice f v bázi z definice cyklického zobrazení je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Jinými slovy, matice f v bázi z definice cyklického zobrazení je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Je-li $f(v) = a \cdot v$, pak pro každé přirozené k je $f^k(v) = a^k \cdot v$. Zejména tedy může spektrum nilpotentního zobrazení obsahovat pouze nulový skalár (a ten tam vždy je).

Přímo z definice plyne, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní, navíc je jeho stupeň nilpotentnosti roven dimenzi prostoru V. Operátor derivování na polynomech je příkladem cyklického zobrazení. Kupodivu to platí i naopak a každé nilpotentní zobrazení je přímým součtem cyklických. Navíc pro každé lineární zobrazení $f : V \to V$, pro které je součet algebraických násobností vlastních čísel roven dimenzi (to nastane vždy pro prostory nad komplexními skaláry), existuje jednoznačný rozklad V na invariantní podprostory V_i příslušné k jednotlivým vlastním číslům λ_i, na kterých je zobrazení $f - \lambda_i \, \mathrm{id}_{\mathrm{V_i}}$ nilpotentní.

V Jordanově rozkladu vystupují vektorové (pod)prostory a lineární zobrazení na nich s jediným vlastním číslem λ a maticí

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Takovýmto maticím (a odpovídajícím invariantním podprostorům) se říká **Jordanův blok**.

Theorem (Věta o Jordanově kanonickém tvaru)

Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $f : V \to V$ je lineární zobrazení s n vlastními čísly včetně algebraických násobností. Pak existuje jednoznačný rozklad prostoru V na přímý součet podprostorů

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

takových, že $f(V_i) \subset V_i$, zúžení f na každé V_i má jediné vlastní číslo λ_i a zúžení $f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}$ na V_i je buď cyklické nebo nulové zobrazení.

Věta tedy říká, že ve vhodné bázi má každé lineární zobrazení blokově diagonální tvar s Jordanovými bloky podél diagonály. Celkový počet jedniček nad diagonálou v takovém tvaru je roven rozdílu mezi celkovou algebraickou a geometrickou násobností vlastních čísel.

Theorem (Věta o Jordanově kanonickém tvaru)

Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $f : V \to V$ je lineární zobrazení s n vlastními čísly včetně algebraických násobností. Pak existuje jednoznačný rozklad prostoru V na přímý součet podprostorů

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

takových, že $f(V_i) \subset V_i$, zúžení f na každé V_i má jediné vlastní číslo λ_i a zúžení $f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}$ na V_i je buď cyklické nebo nulové zobrazení.

Věta tedy říká, že ve vhodné bázi má každé lineární zobrazení blokově diagonální tvar s Jordanovými bloky podél diagonály. Celkový počet jedniček nad diagonálou v takovém tvaru je roven rozdílu mezi celkovou algebraickou a geometrickou násobností vlastních čísel.
Všimněme si, že jsme tuto větu plně dokázali v případech, kdy jsou všechna vlastní čísla různá nebo když jsou geometrické a algebraické násobnosti vlastních čísel stejné.

Důkaz fakt komplikovaný – v učebnici je a zde náznak na tabuli :-)

Plán přednášky

Dualita v lineárním programování

Uvažujme reálnou matici A s m řádky a n sloupci, vektor omezení b a řádkový vektor c zadávající účelovou funkci. Z těchto dat můžeme sestavit dva problémy lineárního programování pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$.

Maximalizační problém: Maximalizuj $c \cdot x$ za podmínky $A \cdot x \leq b$ a zároveň $x \geq 0$.

Minimalizační problém: Minimalizuj $y^T \cdot b$ za podmínky $y^T \cdot A \geq c^T$ a zároveň $y \geq 0$.

Říkáme, že tyto problémy jsou vzájemně duální.

Řekneme, že jde o **řešitelný problém**, jestliže existuje nějaký **přípustný vektor** x, který vyhoví všem omezujícícm podmínkám. Řešitelný maximalizační, resp. minimalizační problém je **ohraničený**, jestliže je účelová funkce na množině vyhovující omezením ohraničená shora, resp. zdola.

Lemma

Je-li $x \in \mathbb{R}^n$ *přípustný vektor pro standarní maximalizační problém a* $y \in \mathbb{R}^m$ *je přípustný vektor pro duální minimalizační problém, pak pro účelové fuknce platí*

$$c \cdot x \leq y^T \cdot b$$

Důkaz.

Jde vlastně jen o snadné pozorování: $x \geq 0$ a $c^T \leq y^T \cdot A$, ale také $y \geq 0$ a $A \cdot x \leq b$, proto musí platit i

$$c \cdot x \leq y^T \cdot A \cdot x \leq y^T \cdot b.$$

□

Odtud okamžitě vidíme, že jestliže jsou oba duální problémy řešitelné, pak musí být i ohraničené. Ještě zajímavější je následující postřeh přímo vycházející z nerovnosti v předchozí větě.

Corollary

Jestliže existují přípustné vektory x a y duálních lineárních problémů takové, že pro účelové funkce platí $c \cdot x = y^T \cdot b$, pak jde o optimální řešení obou problémů.

Theorem (Věta o dualitě)

Je-li standardní problém lineárního programování řešitelný a ohraničený, pak je takový i jeho duální problém, optimální hodnoty jejich účelových funkcí splývají a optimální řešení vždy existuje.

Povšimněme si ještě pěkného přímého důsledku právě zformulované věty o dualitě:

Corollary (Věta o ekvilibriu)

Uvažme přípustné vektory x a y pro standarní maximalizační problém a jeho duální problém. Pak jsou oba tyto vektory optimální, právě tehdy když $y_i = 0$ pro všechny souřadnice s indexem i, pro které $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$ a zároveň $x_j = 0$ pro všechny souřadnice s indexem j, pro které $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} > c_j$.

proof

Předpokládejme, že platí oba vztahy z předpokladu implikace ve větě. Pak tedy můžeme v následujím výpočtu počítat s rovnosti, protože sčítance s ostrou nerovností mají stejně u sebe nulové koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j$$

a z stejného důvodu také

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Tím máme dokázánu jednu implikaci z tvrzení díky větě o dualitě.

Důkaz – pokračování

Předpokládejme nyní, že x a y jsou skutečně optimální vektory. Víme tedy, že platí

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

ale zároveň jsou si levé a pravé strany rovny. Nastává tedy všude rovnost. Přepíšeme-li prvou rovnost jako

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0$$

vidíme, že může být naplněna jen za podmínek ve větě, protože jde o nulový součet samých nezáporných čísel. Z druhé rovnosti stejně plyne i druhé zbylé tvrzení a důkaz je ukončen.

Věty o dualitě a ekvilibriu jsou užitečné při řešení problémů lineárního programování, protože nám ukazují souvislosti mezi nulovostí jednotlivých dodatečných proměnných a naplňování omezujících podmínek.