# Matematika I – 9a
# Lineární diferenční rovnice

Jan Slovák

Masarykova univerzita

12. 11. 2012

# Obsah přednášky

# Plán přednášky

Diferenčními rovnicemi jsme se zabývali již v první kapitole. Nyní si uvedeme náznak obecné teorie.

## Definition

**Homogenní lineární diferenční rovnice** řádu $k$ s konstantními koeficienty je dána výrazem

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

Říkáme také, že řešíme **homogenní lineární rekurenci** řádu $k$.

Diferenčními rovnicemi jsme se zabývali již v první kapitole. Nyní si uvedeme náznak obecné teorie.

### Definition

**Homogenní lineární diferenční rovnice** řádu $k$ s konstantními koeficienty je dána výrazem

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

Říkáme také, že řešíme **homogenní lineární rekurenci** řádu $k$.

Libovolným zadáním $k$ po sobě jdoucích hodnot $x_i$ jsou určeny i všechny následující hodnoty jednoznačně. Zároveň je zjevné, že součet dvou řešení nebo skalární násobek řešení je opět řešení.

Diferenčními rovnicemi jsme se zabývali již v první kapitole. Nyní si uvedeme náznak obecné teorie.

## Definition

**Homogenní lineární diferenční rovnice** řádu $k$ s konstantními koeficienty je dána výrazem

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

Říkáme také, že řešíme **homogenní lineární rekurenci** řádu $k$.

Libovolným zadáním $k$ po sobě jdoucích hodnot $x_i$ jsou určeny i všechny následující hodnoty jednoznačně. Zároveň je zjevné, že součet dvou řešení nebo skalární násobek řešení je opět řešení. Opět tedy je množina řešení vektorovým prostorem. Uvědomme si, že vektory jsou sice nekonečné posloupnosti čísel, samotný prostor všech řešení ovšem bude konečněrozměrný a předem víme, že jeho dimenze bude rovna řádu rovnice $k$.

Pokud tedy budeme předpokládat řešení v nějaké vhodné formě a podaří se nám najít $k$ lineárně nezávislých možností, budeme mít opět **fundamentální systém řešení** a všechna ostatní budou jejich lineárními kombinacemi.

Uvažujme možnost $x_n = \lambda^n$ pro nějaký skalár $\lambda$. Pak dostáváme podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je $\lambda$ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Předpokládejme, že má tento polynom $k$ různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Pokud tedy budeme předpokládat řešení v nějaké vhodné formě a podaří se nám najít $k$ lineárně nezávislých možností, budeme mít opět **fundamentální systém řešení** a všechna ostatní budou jejich lineárními kombinacemi.
Uvažujme možnost $x_n = \lambda^n$ pro nějaký skalár $\lambda$. Pak dostáváme podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je $\lambda$ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Předpokládejme, že má tento polynom $k$ různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
Můžeme za tímto účelem i rozšířit uvažované pole skalárů, např. $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, protože výsledkem výpočtu pak stejně budou i všechna řešení, která opět zůstanou v původním poli díky samotné rovnici.

Pokud tedy budeme předpokládat řešení v nějaké vhodné formě a podaří se nám najít $k$ lineárně nezávislých možností, budeme mít opět **fundamentální systém řešení** a všechna ostatní budou jejich lineárními kombinacemi.

Uvažujme možnost $x_n = \lambda^n$ pro nějaký skalár $\lambda$. Pak dostáváme podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je $\lambda$ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Předpokládejme, že má tento polynom $k$ různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Můžeme za tímto účelem i rozšířit uvažované pole skalárů, např. $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, protože výsledkem výpočtu pak stejně budou i všechna řešení, která opět zůstanou v původním poli díky samotné rovnici.

Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení

$$x_n = (\lambda_i)^n.$$

Abychom byli hotovi, potřebujeme $k$ lineárně nezávislých řešení. Nezávislost ověříme dosazením $k$ hodnot pro $n = 0, \dots, k-1$ pro $k$ možností $\lambda_i$. Dostaneme tzv. Vandermondovu matici a je pěkným (ale ne úplně snadným) cvičením spočíst, že pro všechna $k$ a jakékoliv $k$–tice různých $\lambda_i$ je determinant takovéto matice nenulový. To ale znamená, že zvolená řešení jsou lineárně nezávislá.

Abychom byli hotovi, potřebujeme $k$ lineárně nezávislých řešení. Nezávislost ověříme dosazením $k$ hodnot pro $n = 0, \dots, k-1$ pro $k$ možností $\lambda_i$. Dostaneme tzv. Vandermondovu matici a je pěkným (ale ne úplně snadným) cvičením spočíst, že pro všechna $k$ a jakékoliv $k$–tice různých $\lambda_i$ je determinant takovéto matice nenulový. To ale znamená, že zvolená řešení jsou lineárně nezávislá. Zbývá možnost násobných kořenů $\lambda$. Dosaďme pro takové $\lambda$ do definiční rovnice předpokládané řešení $x_n = n\lambda^n$. Dostáváme podmínku

$$a_0 n\lambda^n + \dots a_k(n-k)\lambda^{n-k} = 0.$$

Abychom byli hotovi, potřebujeme $k$ lineárně nezávislých řešení. Nezávislost ověříme dosazením $k$ hodnot pro $n = 0, \dots, k-1$ pro $k$ možností $\lambda_i$. Dostaneme tzv. Vandermondovu matici a je pěkným (ale ne úplně snadným) cvičením spočíst, že pro všechna $k$ a jakékoliv $k$–tice různých $\lambda_i$ je determinant takovéto matice nenulový. To ale znamená, že zvolená řešení jsou lineárně nezávislá. Zbývá možnost násobných kořenů $\lambda$. Dosaďme pro takové $\lambda$ do definiční rovnice předpokládané řešení $x_n = n\lambda^n$. Dostáváme podmínku

$$a_0 n\lambda^n + \dots a_k(n-k)\lambda^{n-k} = 0.$$

Tuto podmínku je možné přepsat pomocí tzv. derivace polynomu, kterou značíme apostrofem:

$$\lambda(a_0\lambda^n + \cdots + a_k\lambda^{n-k})' = 0$$

a časem uvidíme, že kořen polynomu $f$ je vícenásobný právě, když je kořenem i jeho derivace $f'$. Naše podmínka je tedy opět splněna.

Při násobnosti $\ell$ kořene charakteristického polynomu $\lambda$ dojdeme obdobně k řešením $x_n = n^j \lambda^n$ pro $j = 0, \dots, \ell - 1$. Tato budou opět tvořit lineárně nezávislý systém, tj. fundamentální řešení. Úplně obdobně jako u systémů lineárních rovnic můžeme dostat všechna řešení nehomogenních rovnic tak, že najdeme jedno řešení a přičteme celý vektorový prostor dimenze $k$ řešení odpovídajících systémů homogenních. Za tímto účelem zpravidla hledáme řešení ve tvaru polynomu

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{k-1} n^{k-1}$$

s neznámými koeficienty $\alpha_i$, $i = 1, \dots, k - 1$. Dosazením do diferenční rovnice dostatneme systém $k$ rovnic pro $k$ proměnných $\alpha_i$.

## Vlastnosti řešení

- prostor všech řešení homogenního systému řádu $k$ je vektorový prostor dimenze $k$,

## Vlastnosti řešení

- prostor všech řešení homogenního systému řádu $k$ je vektorový prostor dimenze $k$,
- všechna řešení jsou generována fundamentálním systémem $k$ řešení, který lze obdržet z kořenů charakteristického polynomu ($\lambda_i^n$, pokud jsou kořeny po dvou různé, složitěji v případě násobných kořenů),

## Vlastnosti řešení

- prostor všech řešení homogenního systému řádu $k$ je vektorový prostor dimenze $k$,
- všechna řešení jsou generována fundamentálním systémem $k$ řešení, který lze obdržet z kořenů charakteristického polynomu ($\lambda_i^n$, pokud jsou kořeny po dvou různé, složitěji v případě násobných kořenů),
- všechna řešení nehomogenního systému obdržíme, když přičteme jedno pevně zvolené partikulární řešení systému ke všem řešením systému homogenního se stejnými koeficienty. Partikulární řešení můžeme hledat pomocí tzv. metody neurčitých koeficientů, tj. hledáme jej jako polynom s neznámými koeficienty a řešíme systém lineárních rovnic.

## Vlastnosti řešení

- prostor všech řešení homogenního systému řádu $k$ je vektorový prostor dimenze $k$,
- všechna řešení jsou generována fundamentálním systémem $k$ řešení, který lze obdržet z kořenů charakteristického polynomu ($\lambda_i^n$, pokud jsou kořeny po dvou různé, složitěji v případě násobných kořenů),
- všechna řešení nehomogenního systému obdržíme, když přičteme jedno pevně zvolené partikulární řešení systému ke všem řešením systému homogenního se stejnými koeficienty. Partikulární řešení můžeme hledat pomocí tzv. metody neurčitých koeficientů, tj. hledáme jej jako polynom s neznámými koeficienty a řešíme systém lineárních rovnic.
- řešení vyhovující daným počátečním podmínkám $x_0 = b_0, \dots, x_{k-1} = b_{k-1}$ hledáme z obecného řešení dosazením podmínek a určením koeficientů lineání kombinace fundamentálních řešení. Opět systém lineárních rovnic.

Všimněme si, že pro rovnice s reálnými koeficienty musí vždy kořeny charakterstického polynomu být buď reálné nebo musí vystupovat po dvou komplexně združené nereálné kořeny. Jejich lineárními kombinacemi (součet a rozdíl goniometrických tvarů mocnin) lze pak přímo obdržet reálná řešení vyjádřená pomocí funkcí $\cos(n\varphi)$ a $\sin(n\varphi)$.

## Example

Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, x_2 = 2.$$

## Example

Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, x_2 = 2.$$

Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$. Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$.

## Example

Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, x_2 = 2.$$

Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$.
Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$.
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b2^n - \frac{1}{2}.$$

## Example

Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, x_2 = 2.$$

Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$.
Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$.
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b2^n - \frac{1}{2}.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = -5/6$, $b = 5/6$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$-\frac{5}{6}(-1)^n + \frac{5}{3}2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

# Plán přednášky

# filtry

Uvažujme nyní nekonečné posloupnosti

$$x = \dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

a operaci $T$, která zobrazí posloupnost $x$ na posloupnost $z = Tx$ se členy

$$z_n = a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k+1}.$$

Protože nekonečné posloupnosti $x$ umíme sčítat i násobit skaláry po složkách, jedná se opět o příklad vektorového prostoru. Zjevně má dimenzi nekonečnou.

Posloupnosti lze chápat jako diskrétní hodnoty nějakého signálu, odečítané zpravidla ve velmi krátkých časových jednotkách, operace $T$ je pak filtrem, který signál zpracovává. Z definice je zřejmé, že periodické posloupnosti $x_n$ splňující pro nějaké pevné přirozené číslo $p$

$$x_{n+p} = x_n$$

budou mít i periodické obrazy $z = Tx$

$$\begin{aligned} z_{n+p} &= a_1 x_{n+p} + a_2 x_{n-1+p} + \cdots + a_k x_{n-k+1+p} \\ &= a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k+1} = z_n \end{aligned}$$

se stejnou periodou $p$.

Pro pevně zvolenou operaci $T$ nás bude zajímat, které vstupní posloupnosti zůstanou přibližně stejné (případně až na násobek) a které budou utlumeny na nulové hodnoty.

Pro pevně zvolenou operaci $T$ nás bude zajímat, které vstupní posloupnosti zůstanou přibližně stejné (případně až na násobek) a které budou utlumeny na nulové hodnoty.
Jde nám tedy o vyčíslení jádra našeho lineárního zobrazení $T$. To je dáno homogenní diferenční rovnicí

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

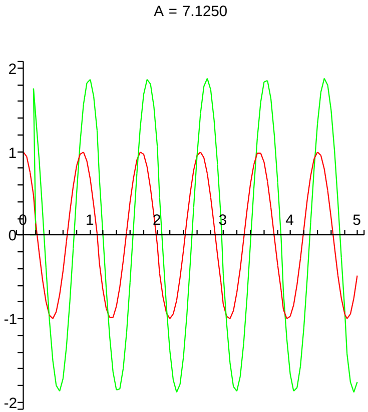
## Špatný equalizer

Jako příklad uvažujme lineární filtr zadaný rovnicí

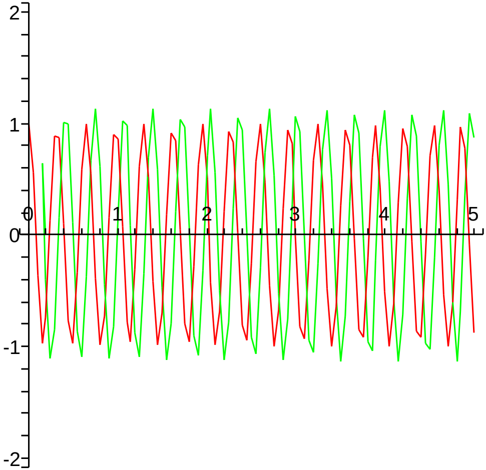
$$z_n = (Tx)_n = x_{n+2} + x_n.$$

Výsledky takového zpracování signálu jsou naznačeny na následujících čtyřech obrázcích pro postupně se zvyšující frekvenci periodického signálu $x_n = \cos(\varphi n)$.

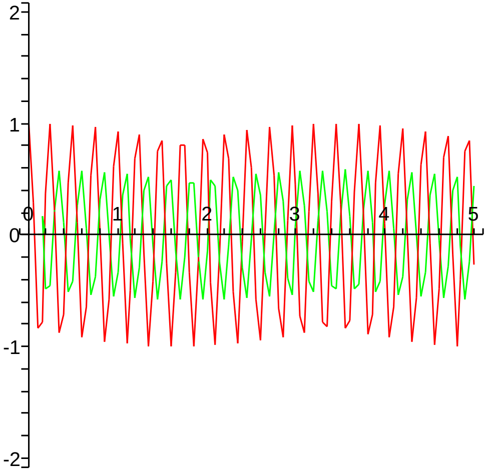
Červený je původní signál, zelený je výsledek po zpracování filtrem. Nerovnoměrnosti křivek jsou důsledkem nepřesného kreslení, oba signály jsou samozřejmě rovnoměrnými sinusovkami.

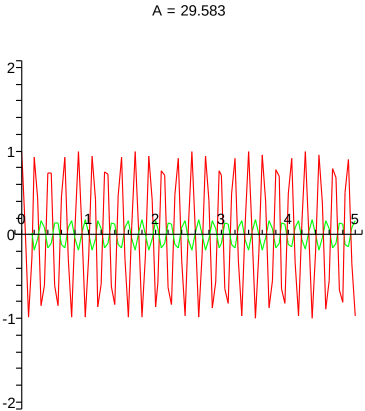


A = 19.375



A = 25.500






Všimněme si, že v oblastech, kde je výsledný signál přibližně stejně silný jako původní, dochází k dramatickému posuvu fáze signálu. Levné equalizery skutečně podobně špatně fungují.
Výsledek lze samozřejmě podrobně spočítat výše uvedenou metodikou.