$A \in Mat_{mn}(\mathbb{K}) \sim \boxed{\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m}$

$\boxed{x \mapsto A\cdot x}$

$\mathbb{K}^*$ $\mathbb{K}$

$\langle \alpha, x \rangle = \alpha(x)$

$\langle e_1,\dots,e_n\rangle = \mathbb{K}^n$

$\tilde{A} = A^T$

$\langle \alpha, A\cdot x\rangle = \langle \tilde{A}(\alpha), x\rangle$

$\alpha\cdot(A\cdot x) = (\alpha\cdot A)\cdot x$

12 19-10:09

$\varphi: V \longrightarrow W$

báze $\underline{e}$, $\underline{f}$

$D = \left(\begin{array}{c|c} 1 \ \ 0 \\ 0 \ \ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

dim(Im φ) hodnost matice

Tv.

$\forall A \ \exists P, Q$ invert.

$\boxed{A = P\cdot D\cdot Q}$

Gaussova eliminace

12 19-10:15

$W = V$ $\varphi: V \longrightarrow V$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\underline{e}$ $\underline{e}$

φ v nějaké vhodné bázi

$J = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 \ 1 & \\ 0 \ \ \lambda_1 & \\ & \ddots \end{array}\right)$

Jordanův blok

speciální případ:

$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A\cdot x = \lambda x$ $|A - \lambda E| = 0$

$(A-\lambda E)^k x = 0$ polynom stupně n nad $\mathbb{C}$

$\varphi^k \equiv 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda_{1,\dots,n} = 0$.

$\forall \varphi: V \to V$, $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, $(\varphi - \lambda_i\, id)|_{V_{\lambda_i}}$

kořenové podprostory

je nilpotentní

12 19-10:21

$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Věta: $\forall A \ \exists \underline{e} \ \exists P$ invert.

$A = P\cdot J\cdot P^{-1}$

$P^{-1}\cdot A\cdot P = J$

$\tilde{P}^{-1}\cdot B\cdot \tilde{P} = J$

$A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ jsou matice téhož zobr. φ v různých bázích $\Longleftrightarrow$ mají stejné J až na pořadí bloků.

12 19-10:31

$A - \lambda E \in Mat_n(\mathbb{K}[\lambda])$

Gaussova eliminace zde "funguje".

Známe: $A = P\cdot B\cdot P^{-1}$ pro invert. P,

$\Rightarrow$ $A-\lambda E$, $B - \lambda E$ mají stejný kanonický tvar tj. $P(\lambda), Q(\lambda)$, $A = P(\lambda)\cdot B\cdot Q(\lambda)$

12 19-10:41

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $(\lambda-4)(\lambda+1) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = (\lambda-4)(\lambda+1)$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 6 \\ 0 & (2-\lambda)(1-\lambda)-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 6 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{pmatrix}}$

$3 - \frac{1}{2}(2-\lambda)(1-\lambda) = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$

$=$

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(2-\lambda) \\ 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(2-\lambda) \\ 0 & 3-\frac{1}{2}(2-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(2-\lambda) \\ 0 & (\lambda-4)(\lambda+1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-4)(\lambda+1) \end{pmatrix}$

12 19-10:50

$\varphi: V \to W$
$\quad \underline{e} \qquad \underline{f}$

$A = P^{-1} B Q$ ale P, Q unit., ortogonální (unitární)
$ = P^{*} B Q$

Sing. rozklad:

$A = P^{*} D Q \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \lambda_r \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$, λ_i^2 vlastní čísla $A^{*} \cdot A$

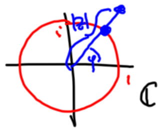
$(A^{*} \cdot A)^{*} = A^{*} \cdot A \quad \langle A^{*} \cdot A \cdot x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$
$= \langle A x, A \cdot x \rangle \geq 0$

12 19-11:14

Polární rozklad:

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots \lambda_r & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = D$

$A = P \cdot D \cdot Q^{*}$
$= \underbrace{P \cdot D \cdot P^{*}}_{B} \cdot \underbrace{P \cdot Q^{*}}_{V}$ ... unitární



pozitivně semidefinitní, hermitovská

$B^{*} = P \cdot D^{*} \cdot P^{*} = P \cdot D \cdot P^{*} = B$

$= \underbrace{\boxed{P \cdot Q^{*}}}_{\tilde{V}} \cdot \underbrace{\boxed{Q \cdot D \cdot Q^{*}}}_{\tilde{B}}$

12 19-11:24

$A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \qquad a_{ij} \geq 0$

$A^{k} = (\tilde{a}_{ij}) \quad \tilde{a}_{ij} > 0 \ \forall i, j \implies [\min, \underset{\lambda_1}{\max}]$

$\mathrm{spec}(A) = \lambda_1, \dots, \lambda_r$ dokážeme $|\lambda_1| > \lambda_i \quad i > 1$.

víme že $\lambda_1 = 1$. $\quad v_1$ ... vlastní vektor k λ_1

$\mathbb{R}^{n} = \langle v_1 \rangle + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_r}$ předpoklad: dost vlastních vektorů

$x = x_1 v_1 + v_2 + \dots + v_r \qquad x_1 \neq 0$

$A \cdot x = \lambda_1 x_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r$

$A^{s} \cdot x = \boxed{\lambda_1^{s} x_1 v_1} + \lambda_2^{s} v_2 + \dots + \lambda_r^{s} v_r$

$\uparrow$ dominuje

12 19-11:37