$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_m^{(n)} \end{pmatrix} \qquad x^{(n)} \mapsto x^{(n+1)} = A \cdot x^{(n)}$$

$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots$

posloupnost + rekurence:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ \cancel{x_{n-k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

funkce řešení $x_n = \lambda^n$ odpovídá vlastním vektorům matice A !

$$\boxed{x^{(n+1)} = \lambda \cdot x^{(n)}} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda^k x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

11 14-10:05

$$\Rightarrow |A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_0-\lambda & a_1 & \dots & a_k \\ 1 & -\lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{vmatrix} (-1)^{k+2} a_k$$

$$+ \begin{vmatrix} a_0-\lambda & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ 1 & -\lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix} (-\lambda) \quad \checkmark$$

$k = 1$

$$\begin{vmatrix} a_0-\lambda & a_1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = +\lambda^2 - a_0\lambda - a_1$$

11 14-10:24

$\lambda_0 > 0 \qquad |\lambda| < 1$

$$x^{(0)} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

$$A \cdot x^{(0)} = \lambda_0 c_1 y_1 + \lambda_1 c_2 y_2 + \dots + \lambda_{m-1} c_m y_m$$

$$A^{\ell} \cdot x^{(n)} = \boxed{\lambda_0^{\ell} c_1 y_1} + \boxed{\text{HODNĚ MALÉ}}$$

11 14-10:43

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_m^{(n)} \end{pmatrix} \qquad x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + \dots + x_m^{(n)} = 1$$

$x_i \geq 0$

$x^{(n+1)} = A \cdot x^{(n)}$ A stochastická matice:

$a_{ij} \geq 0$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1}$$

$$? \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{m} x_k = 1$$

11 14-10:47

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \cdot & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & * & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ & & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & * & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & & & \\ * & * & \dots & & \end{pmatrix}$$

11 14-11:08

Pojmy:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}$$

spektrální poloměr: matice A $= |\lambda|$ pro největší vlastní číslo

$\|A\|$ .. norma matice $= \sum_{i,j} |a_{ij}|$

$|x|$ .. norma vektoru $= \sum_i |x_i|$

pozitivní matice A .. $A^k$ má samé kladné čísla pro nějaké $k$

A pozitivní, spektrální poloměr $\lambda \Rightarrow$ $\lambda$ je jednoduchý, $|\lambda|$ dominantní, a. $x_i > 0$.

11 14-11:13

lemma $P \ni 0 \in \mathbb{R}^n$, ...

$\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární.

$\psi: P \to$ ... $P$ ...

$\Rightarrow$ spektrální poloměr $\psi < 1$.

$|\lambda| \leq 1$, když $|\lambda| = 1$

a) $\lambda^k = 1$ pro nějaké $k$

$\boxed{\text{b) } \lambda^k \neq 1 \text{ nikdy}}$

$P$ je omezená $\Rightarrow$ ...

$\Rightarrow$ a) nenastane.

ad b) $W \subset \mathbb{R}^n$ ... $\psi$ ... $\dim W = 2 \Rightarrow$ ... $y \in \partial P \cap W$

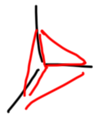
11 14-11:20

$S = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T;\ |x| = 1,\ x_i \geq 0\}$

$x \in S$, $A \cdot x \geq 0$, ... $> 0$. $(|Ax| > 0)$

$\Rightarrow x \mapsto |Ax|^{-1} \cdot A \cdot x \in S$

Brouwerova věta: ... pevný bod $y$.



$\Rightarrow \underline{A \cdot y = \lambda \cdot y}$

$y$ ... $S$.

$A^k \cdot y = \lambda^k \cdot y \Rightarrow y_i > 0\ \forall i$

11 14-11:30

$y = (y_1, \dots, y_n)^T \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & & 0 \\ & y_2 & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix}$

$B = \lambda^{-1} (Y^{-1} \cdot A \cdot Y) \qquad B^k = \lambda^{-k} (Y^{-1} \cdot A^k \cdot Y)$

... $B$ ... $(1\ 1\ 1 \dots 1)$:

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & y_n^{-1} \end{pmatrix} A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\lambda}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & y_n^{-1} \end{pmatrix} \cancel{\lambda} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B$: $u = (u_1, \dots, u_n) \xrightarrow{\psi} u \cdot B = v$

$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i,j=1}^{n} u_i b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} u_i = 1$ pro $u \in S$.

... pro $\psi$, $P := -w + S$.

11 14-11:38