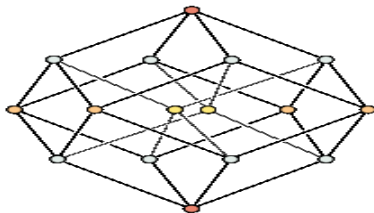


5 Ekvivalence, Uspořádané množiny

V této lekci dále pokračujeme probíráním binárních relací na množinách jako nástrojů vyjadřujících vztahy mezi objekty. Zaměřujeme se nyní především na relace „srovnávající“ objekty podle jejich vlastností – buď na formy shodnosti nebo uspořádání.



Stručný přehled lekce

- * Relace ekvivalence, jím odpovídající rozklady množin.
- * Uspořádané množiny a relevantní pojmy k uspořádání.
- * Hasseovské diagramy uspořádaných množin.

Vlastnosti binárních relací, zopakování

Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;



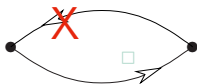
- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;



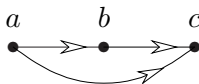
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;

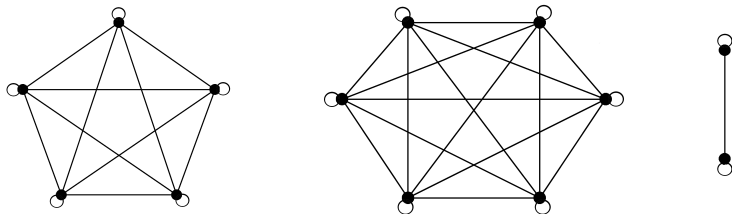


- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



5.1 Relace ekvivalence

- Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ **ekvivalence** právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto **tři vlastnosti** tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalence. □
- Jak vypadá **graf relace ekvivalence**? □



- Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“.

Značení. V případě relace ekvivalence se někdy lze setkat s pojmenováním jako \sim či \approx místo R . Místo $(x, y) \in R$ se pak píše $x \approx y$.

Další ukázkové binární relace

Příklad 5.1. Necht' M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ a zkoumejme, zda se jedná o ekvivalence:

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y ; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y ; □
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů; □
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku **nebo** stejnou barvu vlasů. □

U kterého body se nejedná o relaci ekvivalence a proč? □

Je to poslední případ, kdy není splněna tranzitivita! □

Tvrzení 5.2. Necht' R, S jsou dvě relace ekvivalence na stejné množině M . Pak jejich **průnik** $R \cap S$ je opět relací ekvivalence.

Příklad 5.3. Necht' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je binární relace definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když $|x - y|$ je dělitelné třemi.

V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné“? □ Dávají stejný zbytek po dělení třemi. □ □

Příklad 5.4. Bud' R binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když x i y sedí v první lavici. □

Už na „první pohled“ jde o relaci symetrickou a tranzitivní. Proč se v tomto případě **nejedná** o relaci ekvivalence? □

Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

5.2 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 5.5. Rozklad množiny. Necht' M je množina.

Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (tj. každý prvek \mathcal{N} je **neprázdná** podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$. \square

Prvkům \mathcal{N} se také říká *třídy rozkladu*.

- Bud' $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M . \square
- Necht' $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$,
 $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$.
Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel \mathbb{N} podle zbytkových tříd. \square

Každý rozklad \mathcal{N} na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M :

Věta 5.6. Necht' M je množina a \mathcal{N} rozklad na M . Necht' $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto

$$(x, y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x, y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je **ekvivalence** na M . \square

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je **reflexivní, symetrická a tranzitivní** (Def. 4.4). \square

- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož \mathcal{N} je rozklad na M , musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 5.5). Proto $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. \square
- Symetrie: Necht' $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$. To ale znamená, že také $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. \square
- Tranzitivita: Necht' $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A, B \in \mathcal{N}$ takové, že $x, y \in A$ a $y, z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 5.5 platí $A = B$. Tedy $x, z \in A = B$, proto $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$. \square

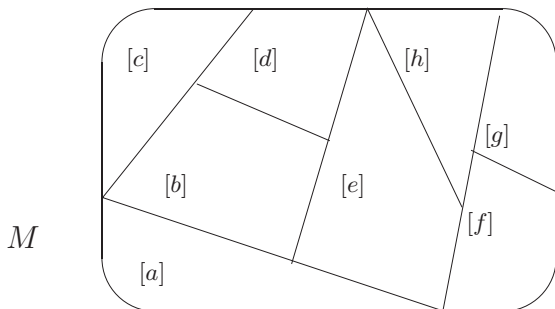
\square

Každá ekvivalence R na M naopak jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M :

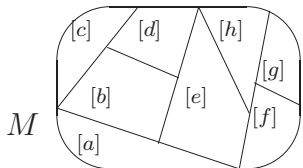
Věta 5.7. *Nechť M je množina a R ekvivalence na M . Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad na M , který značíme M/R . \square



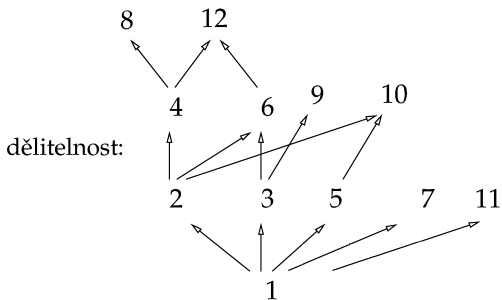
Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky **Definice 5.5**.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$. \square
- Necht' $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. \square
 Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). \square Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:
 - * „ $[x] \subseteq [y]$ “: Necht' $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$. \square
 - * „ $[y] \subseteq [x]$ “: Necht' $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$. \square
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. \square

5.3 Uspořádání a uspořádané množiny

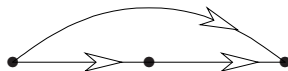
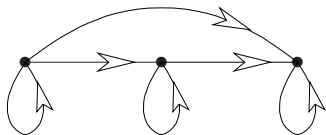
- Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ (částečné) *uspořádání* právě když R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Tyto **tři vlastnosti** tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je uspořádáním. □
- Neformálně řečeno: uspořádání je taková relace $R \subseteq M \times M$, kde $(x, y) \in R$ právě když x je v nějakém smyslu „**menší nebo rovno**“ než y . □
Mohou ovšem existovat taková $x, y \in M$, kde neplatí $(x, y) \in R$ ani $(y, x) \in R$. (Pak říkáme, že x a y jsou **nesrovnatelné**.) □
- Jak **názorně** zobrazit (částečné) uspořádání? Zjednodušeně takto:



Značení. Pro větší přehlednost se relace uspořádání často značí symboly jako \sqsubseteq či \preceq místo prostého R . I my budeme psát třeba $x \preceq y$ místo $(x, y) \in R$.

Poznámka: Zajisté jste se již setkali s „neostrým“ uspořádáním čísel \leq a „ostrým“ uspořádáním $<$. □ Všimněte si dobře, že námi definované uspořádání je **vždy „neostré“**.

Pokud byste naopak chtěli definovat „ostré“ uspořádání, mělo by vlastnosti **ireflexivní**, antisymetrické a tranzitivní. (Příliš se však tato varianta nepoužívá.)

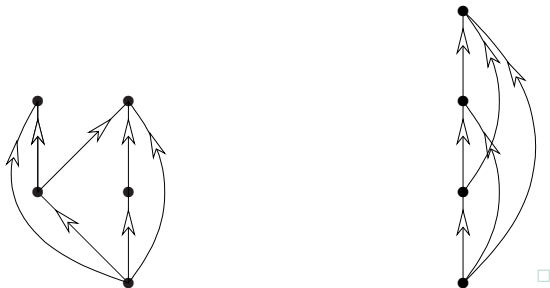


□

Nadále budeme pracovat pouze s neostrým uspořádáním, ale smyčky vyplývající z reflexivity budeme pro větší přehlednost v obrázcích vynechávat.

Uspořádaná množina

Definice 5.8. **Uspořádaná množina** je dvojice (M, \preceq) , kde M je množina a \preceq je (částečné) uspořádání na M . \square



Definice: Uspořádání \preceq na M je *lineární* (nebo také *úplné*), pokud každé dva prvky M jsou v \preceq srovnatelné.

Příklady uspořádaných množin

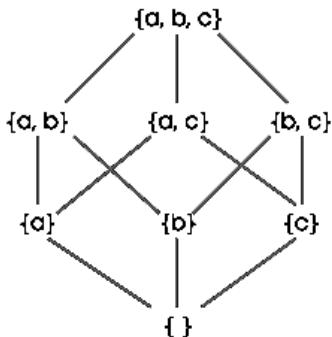
Příklad 5.9. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace uspořádání $R \subseteq M \times M$ definované následovně (jedná se vždy o uspořádání?):*

- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y ; \square
- $(x, y) \in R$ právě když y má alespoň takovou výšku jako x ; \square
- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo. \square

Ano, i v posledním bodě se jedná o uspořádání! Zajímavé, že? \square

Příklad 5.10. Další ukázky *uspořádaných množin* následují zde:

- (\mathbb{N}, \leq) je lineárně uspořádaná množina, kde \leq má „obvyklý“ význam. \square
- $(\mathbb{N}, |)$, kde $a|b$ je relace dělitelnosti „ a dělí b “ na přirozených číslech, je uspořádaná množina. Toto uspořádání není lineární. \square
- Bud' M množina. Pak $(2^M, \subseteq)$ je uspořádaná množina (říkáme *inkluzí*). Které dvojice jsou v uspořádání inkluzí *nesrovnatelné*?



\square

Jak rozšířit uspořádání na větší množiny

Příklad 5.11. *Uspořádání „po složkách“.*

Nechť (A, \leq_A) a (B, \leq_B) jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci \sqsubseteq na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \sqsubseteq (a', b') \quad \text{právě když} \quad a \leq_A a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \sqsubseteq)$ je uspořádaná množina. Toto usp. se nazývá „po složkách“. \square \square

Příklad 5.12. *Lexikografické uspořádání.*

Nechť (A, \leq_A) a (B, \leq_B) jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci \preceq na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \preceq (a', b') \quad \text{právě když} \quad \text{buď } a \leq_A a' \text{ a } a \neq a', \text{ nebo } a = a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \preceq)$ je uspořádaná množina. Navíc pokud \leq_A i \leq_B jsou lineární, je i \preceq lineární. Toto uspořádání se nazývá lexikografické. \square

Fakt: Jsou-li $(A_1, \leq_1), \dots, (A_n, \leq_n)$ uspořádané množiny, kde $n \geq 2$, pak množinu $A_1 \times \dots \times A_n$ lze uspořádat třeba **po složkách** nebo **lexikograficky**.

Všimněte si, že lexikograficky se například řadí slova ve slovníku. . .

5.4 Další pojmy uspořádaných množin

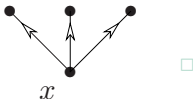
Definice 5.13. Necht' (M, \preceq) je uspořádaná množina.

Prvek $x \in M$ je

- minimální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $y \preceq x$, pak $x \preceq y$. (Tj. x je minimální právě když neexistuje žádný prvek ostře menší než x .)



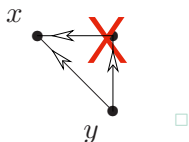
- maximální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $x \preceq y$, pak $y \preceq x$. (Tj. x je maximální právě když neexistuje žádný prvek ostře větší než x .)
- nejmenší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.



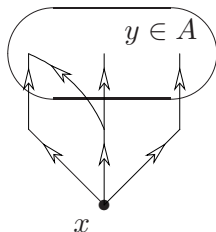
- největší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.

Prvek $x \in M$

- *pokrývá* $y \in M$ právě když $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žádné $z \in M$ takové, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.

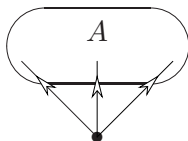


- je *dolní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $x \preceq y$ pro každé $y \in A$.

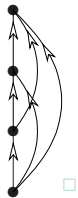


- je *horní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $y \preceq x$ pro každé $y \in A$.

- $x \in M$ je *infimum* množiny $A \subseteq M$ právě když x je největší dolní závora množiny A .



- $x \in M$ je *supremum* množiny $A \subseteq M$, právě když x je nejmenší horní závora množiny A . □
- $A \subseteq M$ je *řetězec* v uspořádání \preceq právě když (A, \preceq) je *lineárně* uspořádaná množina.

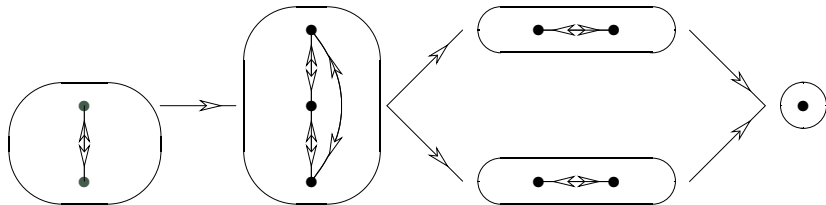


Pozor! Některé uvedené definice mají dosti „netriviální chování“ na nekonečných množinách. Proto je budeme obvykle uvažovat jen nad konečnými množinami.

Relace předuspořádání

Definice: Relace $R \subseteq M \times M$ je *předuspořádání* (také *kvaziuspořádání*, nebo *polouspořádání*) právě když R je *reflexivní a tranzitivní*. □

Rozdíl mezi uspořádáním a předuspořádáním je (neformálně řečeno!) v tom, že u předuspořádání srovnáváme prvky podle kritéria, které není pro daný prvek jedinečné. V předuspořádání takto mohou vznikat „balíky“ (třídy) se stejnou hodnotou kritéria, což schematicky ilustrujeme na následujícím obrázku.



Věta 5.15. Je-li \sqsubseteq předuspořádání na M , můžeme definovat relaci \sim na M předpisem

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak \sim je ekvivalence na M , která se nazývá **jádro předuspořádání** \sqsubseteq . \square

Na rozkladu M/\sim pak lze zavést relaci \preceq definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je **uspořádaná množina indukovaná** \sqsubseteq . \square

Pro ukázkou si vezměme relaci dělitelnosti na \mathbb{Z} . Pak třeba $-2 \sim 2$.
Jádrem zde jsou dvojice čísel stejné absolutní hodnoty.

Věta 5.15. Je-li \sqsubseteq předuspořádání na M , můžeme definovat relaci \sim na M předpisem

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak \sim je ekvivalence na M , která se nazývá **jádro předuspořádání** \sqsubseteq .

Na rozkladu M/\sim pak lze zavést relaci \preceq definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je uspořádaná množina.

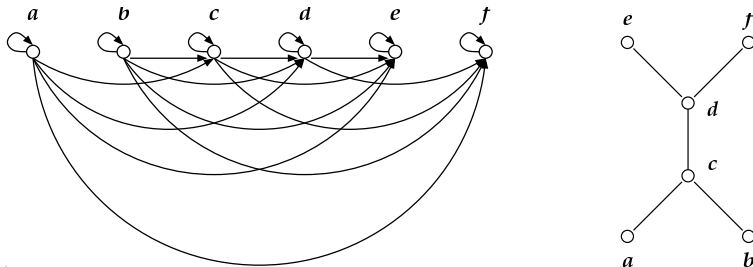
Důkaz (náznak): \square Tranzitivita a reflexivita relace \sim vyplývá z tranzitivity a reflexivity relace \sqsubseteq . Symetrie \sim pak je přímým důsledkem její definice. Tudíž \sim skutečně je relací ekvivalence a M/\sim je platný rozklad. \square

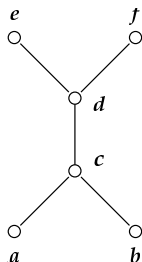
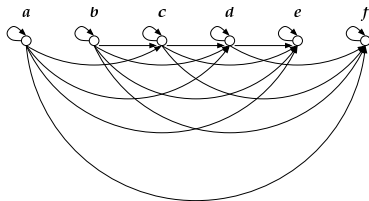
Tranzitivita a reflexivita relace \preceq se opět dědí z relace \sqsubseteq . Její antisymetrie vyplývá následující úvahou: Pokud $[x] \preceq [y]$ a $[y] \preceq [x]$, pak podle naší definice $x \sqsubseteq y$ a $y \sqsubseteq x$, neboli $x \sim y$ a $[x] = [y]$ podle definice tříd rozkladu. \square

Pozor, nejdůležitější částí této větve důkazu je však ještě zdůvodnění, že naše podaná definice vztahu $[x] \preceq [y]$ je korektní, což znamená, že její platnost nezávisí na konkrétní volbě reprezentantů x z $[x]$ a y z $[y]$. \square

5.5 Hasseovské diagramy

Motivací zavedení tzv. Hasseovských diagramů uspořádaných množin jsou přehlednější „obrázky“ než u grafů relací. Například si srovnajte následující:

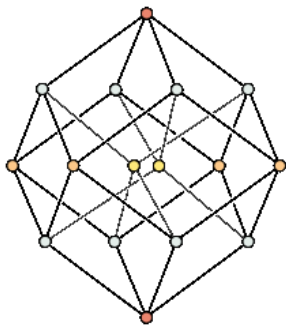




Definice: *Hasseovský diagram* konečné uspořádané množiny (M, \preceq) je jeho (jednoznačné) grafické znázornění získané takto:

- Do první „horizontální vrstvy“ zakreslíme body odpovídající minimálním prvkům (M, \preceq) . (Tj. které **nepokrývají** nic.) \square
- Máme-li již zakreslenou vrstvu i , pak do vrstvy $i + 1$ (která je „nad“ vrstvou i) zakreslíme všechny nezakreslené prvky, které **pokrývají pouze** prvky vrstev $\leq i$. Pokud prvek x vrstvy $i + 1$ pokrývá prvek y vrstvy $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. „čárkou“).

Příklad 5.16. Relaci inkluze na čtyřprvkové množině $\{a, b, c, d\}$ zakreslíme Hasseovským diagramem takto:



□

□

Jak vidíme, v Hasseovském diagramu „**vynecháváme**“ ty hrany relace \preceq , které vyplývají z **reflexivity** či **tranzitivity**. To celý obrázek výrazně zpřehlední, a přitom nedochází ke ztrátě informace. □

Lze vynechat i šipky na hranách, neboť dle definice všechny míří „vzhůru“. □

Také pojem „**vrstvy**“ v definici je jen velmi neformální, důležité je, že větší (pokrývající) prvky jsou **nad menšími** (pokrývanými).