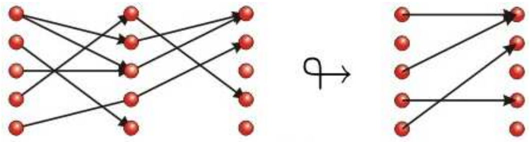
6 Funkce a skládání, Induktivní definice

Vraťme se nyní k látce Lekce 4 z pohledu funkcí a jejich skládání a inverzí.



Kde jste se již intuitivně se skládáním funkcí setkali – jak například spočítáte na kalkulačce výsledek složitějšího vzorce?

Na závěr látky o relacích a funkcích se stručně podíváme na problematiku induktivních definic a uzávěrů vlastností. □

Stručný přehled lekce

* Přehled základních vlastností funkcí, inverze.
* Skládání funkcí (coby relací), speciálně aplikováno na permutace.
* Induktivní definice množin a funkcí; uzávěry vlastností relací.

Relace a funkce, zopakování

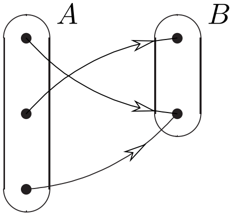
- *Relace* mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu
$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k \,.$$
Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *k-ární relaci R na A*. □

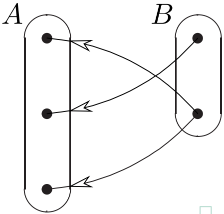
- *(Totální) funkce* z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. □
  * Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f. Funkcím se také říká *zobrazení*.
  * Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$. Zápis
$$f : A \to B$$
říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B. □

- Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B.

- *Inverzní relace* k binární relaci R se značí R^{-1} a je definována takto:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

$\boldsymbol{R}$: 

$\boldsymbol{R^{-1}}$: 

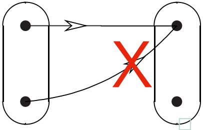
□

R^{-1} je tedy relace mezi B a A.

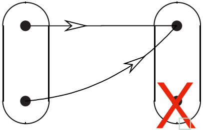
6.1 Vlastnosti funkcí

Definice 6.1. Funkce (případně parciální funkce) $f : A \to B$ je

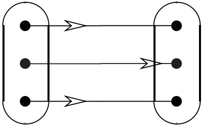
- *injektivní* (nebo také prostá) právě když pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$;



- *surjektivní* (nebo také „na“) právě když pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$;



- *bijektivní* (vzáj. jednoznačná) právě když je injektivní a souč. surjektivní. □



Následují jiné ukázky vlastností funkcí.

- Funkce $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je surjektivní, ale není prostá.$\square$
- Funkce $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daná předpisem
$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jestliže } x < 0, \\ 2x & \text{jinak} \end{cases}$$
je bijektivní.$\square$
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ je bijektivní.$\square$
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \{a, b\}$ je injektivní, ale není surjektivní.$\square$
- Dokázali byste nalézt bijektivní funkci $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

Inverze funkce

Příklady inverzí pro relace–funkce.

- Inverzí bijektivní funkce $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{Z}$ je funkce $f^{-1}(x) = x - 1$.
- Inverzí prosté funkce $f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ je parciální funkce $f^{-1}(x) = \ln x$.
- Funkce $g(x) = x \bmod 3$ není prostá na $\mathbb{N}$, a proto její inverzí je „jen" relace $g^{-1} = \{(a, b) \mid a = b \bmod 3\}$.
  Konkr. $g^{-1} = \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), \dots, (1, 1), (1, 4), \dots, (2, 2), (2, 5), \dots\}$.

Tvrzení 6.2. *Mějme funkci $f : A \to B$. Pak její inverzní relace f^{-1} je*

a) parciální funkce právě když f je prostá,

b) funkce právě když f je bijektivní.

Důkaz vyplývá přímo z definic funkce a inverze relace. $\square$

6.2 Skládání funkcí, permutace

Fakt: Mějme zobrazení (funkce) $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Pak jejich *složením* coby relací v tomto pořadí vznikne zobrazení $(g \circ f) : A \to C$ definované

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.\square$$

- Jak například na běžné kalkulačce vypočteme hodnotu funkce $\sin^2 x$? $\square$
  Složíme (v tomto pořadí) „elementární" funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. $\square$
- Jak bychom na „elementární" funkce rozložili aritmetický výraz $2\log(x^2+1)$? $\square$
  Ve správném pořadí složíme funkce $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x+1$, $f_3(x) = \log x$ a $f_4(x) = 2x$. $\square$
- A jak bychom obdobně vyjádřili složením funkcí aritmetický výraz $\sin x + \cos x$?
  Opět je odpověď přímočará, vezmeme „elementární" funkce $g_1(x) = \sin x$ a $g_2(x) = \cos x$, a pak je „složíme" další funkcí $h(x,y) = x+y$. $\square$
  Vidíme však, že takto pojaté „skládání" už nezapadá hladce do našeho zjednodušeného formalismu skládání relací.

Skládání permutací

Definice: Nechť *permutace* π množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ je určena seřazením jejích prvků $(p_1,\ldots,p_n)$. Pak π je zároveň bijektivním zobrazením $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ definovaným předpisem $\pi(i) = p_i$. □

Tudíž lze permutace *skládat jako relace* podle Definice 4.7. □

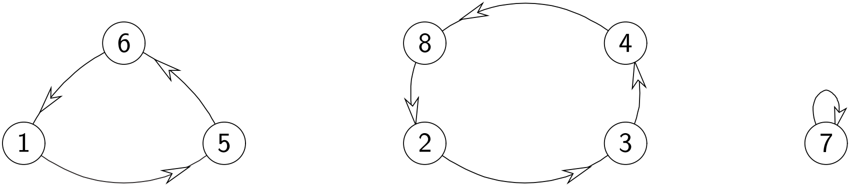
Poznámka: Všechny permutace množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ spolu s operací skládání tvoří grupu, zvanou symetrická grupa S_n.

Permutační grupy (podgrupy symetrické grupy) jsou velice důležité v algebře, neboť každá grupa je vlastně isomorfní některé permutační grupě. □

Příkladem permutace vyskytujícím se v programátorské praxi je třeba zobrazení $i \mapsto (i+1) \mod n$ ("inkrement"). □Často se třeba lze setkat (aniž si to mnohdy uvědomujeme) s permutacemi při indexaci prvků polí.

Cykly permutací

V kontextu pohledu na funkce a jejich skládání coby relací si zavedeme jiný, názornější, způsob zápisu permutací – pomocí jejich cyklů.



Definice: Nechť π je permutace na množině A. *Cyklem v π* rozumíme posloupnost $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ různých prvků A takovou, že $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $\pi(a_k) = a_1$. □

- Jak název napovídá, v zápise cyklu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ není důležité, kterým prvkem začneme, ale jen dodržení cyklického pořadí. Cyklus v permutaci může mít i jen jeden prvek (zobrazený na sebe).
- Například permutace $(5, 3, 4, 8, 6, 1, 7, 2)$ je zakreslena svými cykly výše.

Reprezentace permutací jejich cykly

Věta 6.3. *Každou permutaci π na konečné množině A lze zapsat jako složení cyklů na disjunktních podmnožinách (rozkladu) A.* □

Důkaz: Vezmeme libovolný prvek $a_1 \in A$ a iterujeme zobrazení $a_2 = \pi(a_1)$, $a_3 = \pi(a_2)$, atd., až se dostaneme „zpět“ k $a_{k+1} = \pi(a_k) = a_1$. Proč tento proces skončí? Protože A je konečná a tudíž ke zopakování některého prvku a_{k+1} musí dojít. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $\pi(a_k) = a_j$ pro $j > 1$. Takto získáme první cyklus $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$. □

Induktivně pokračujeme s hledáním dalších cyklů ve zbylé množině $A \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, dokud nezůstane prázdná. □ □

Značení permutace jejími cykly: Nechť se permutace π podle Věty 6.3 skládá z cyklů $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_l \rangle$ až třeba $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$. Pak zapíšeme

$$\boldsymbol{\pi = (\, \langle a_1, \dots, a_k \rangle \, \langle b_1, \dots, b_l \rangle \dots \langle z_1, \dots, z_m \rangle \,) .}$$

Příklad 6.4. *Ukázka skládání permutací daných svými cykly.*

Vezměme 7-prvkovou permutaci $\pi = (3, 4, 5, 6, 7, 1, 2)$. Ta se skládá z jediného cyklu $\langle 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6 \rangle$. Jiná permutace $\sigma = (5, 3, 4, 2, 6, 1, 7)$ se rozkládá na tři cykly $\langle 1, 5, 6 \rangle$, $\langle 2, 3, 4 \rangle$ a $\langle 7 \rangle$. □

Nyní určíme složení $\sigma \circ \pi$ těchto dvou permutací (už přímo v zápisu cykly):

$$(\langle 1, 5, 6 \rangle \langle 2, 3, 4 \rangle \langle 7 \rangle) \circ (\langle 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6 \rangle) = (\langle 1, 4 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 6, 5, 7 \rangle)$$

(Nezapomínejme, že první se ve složení aplikuje pravá permutace!) □

Postup skládání jsme použili následovný:

* 1 se zobrazí v permutaci vpravo na 3 a pak vlevo na 4. □
* Následně 4 se zobrazí na 6 a pak na 1. Tím „uzavřeme“ první cyklus $\langle 1, 4 \rangle$.□
* Dále se 2 zobrazí na 4 a pak hned zpět na 2, tj. má samostatný cyklus. □
* Zbylý cyklus $\langle 3, 6, 5, 7 \rangle$ určíme analogicky.

□

6.3 Induktivní definice množin a funkcí

Přímým zobecněním dřívějších rekurentních definic je následující koncept.

Definice 6.5. Induktivní definice množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. □
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

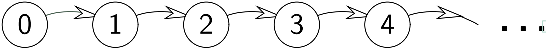
  Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

  V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$. □

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující těmto pravidlům. □

Poznámka: Vidíte podobnost této definice s uzávěrem relace? (Věta 6.9.)

- Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel, která je formálně zavedena následovně.
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - Je-li $i \in \mathbb{N}$, pak také $i + 1 \in \mathbb{N}$.



- Pro každé $y \in \mathbb{N}$ můžeme definovat jinou množinu $M_y \subseteq \mathbb{N}$ induktivně:
  - $y \in M_y$
  - Jestliže $x \in M_y$ a $x + 1$ je liché, pak $x + 2 \in M_y$.

  Pak například $M_3 = \{3\}$, nebo $M_4 = \{4 + 2i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- Dalším příkladem induktivní definice je už známé zavedení výrokových formulí z Oddílu 1.5. Uměli byste teď přesně říci, co tam byly bázické prvky a jaká byla induktivní pravidla?

Jednoznačnost induktivních definic

Definice: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázických prvků pomocí induktivních pravidel právě jedním způsobem. □

- Definujme například množinu $M \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:
  - $2, 3 \in M$
  - Jestliže $x, y \in M$ a $x \leq y$, pak také $x^2 + y^2$ a $x \cdot y$ jsou prvky M.

  Proč tato induktivní definice není jednoznačná? □Například číslo $8 \in M$ lze odvodit způsobem $8 = 2 \cdot (2 \cdot 2)$, ale zároveň zcela jinak $8 = 2^2 + 2^2$. □

- V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin? Je to především v dalším možném využití induktivní definice množiny jako „základny“ pro odvozené vyšší definice, viz následující.

Definice 6.6. **Induktivní definice funkce** z induktivní množiny.
Nechť množina M je dána jednoznačnou induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F} : M \to X$ je definována *induktivně* (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázických prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$. □
- Pro každé induktivní pravidlo typu

  "Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \ldots, x_\ell) \in M$"

  je definováno

  $\boldsymbol{\mathcal{F}\big(\, f(x_1, \ldots, x_\ell) \,\big)}$ **na základě hodnot** $\boldsymbol{\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_\ell)}$. □

Pro příklad se podívejme třeba do manuálu unixového příkazu `test EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status.  It is one of:
 ! EXPRESSION                   EXPRESSION is false
 EXPRESSION1 -a EXPRESSION2     both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true
 EXPRESSION1 -o EXPRESSION2     either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true
 [-n] STRING                    the length of STRING is nonzero
 STRING1 = STRING2              the strings are equal
   ......
```

Induktivní definice se „strukturální“ indukcí

Příklad 6.7. *Jednoduché aritmetické výrazy a jejich význam.*

Nechť je dána abeceda $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\odot,\oplus,(,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

- Dekadický zápis každého přirozeného čísla **n** je prvek $SExp$.
- Jestliže $x,y \in SExp$, pak také $(x)\odot(y)$ a $(x)\oplus(y)$ jsou prvky $SExp$. □(Jak vidíme, díky nucenému závorkování je tato induktivní definice jednoznačná.)

Tímto jsme aritmetickým výrazům přiřadili jejich „formu“, tedy syntaxi. □

Pro přiřazení „významu“, tj. sémantiky aritmetického výrazu, následně definujme funkci *Val* $: SExp \to \mathbb{N}$ induktivně takto: □

- Bázické prvky: $Val(\mathbf{n}) = n$, kde **n** je dekadický zápis přirozeného čísla n. □
- První induktivní pravidlo: $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$.
- Druhé induktivní pravidlo: $Val((x) \odot (y)) = Val(x) \cdot Val(y)$. □

Co je tedy správným významem uvedených aritmetických výrazů? □

Příklad 6.8. *Důkaz správnosti přiřazeného „významu" $Val : SExp \to \mathbb{N}$.*

Věta. *Pro každý výraz $s \in SExp$ je hodnota $Val(s)$ číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu s podle běžných zvyklostí aritmetiky.*

Matematickou indukcí: Na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n", a proto si jej budeme muset nejprve definovat.

Naši indukci tedy povedeme podle „délky ℓ odvození výrazu s" definované jako počet aplikací induktivních pravidel potřebných k odvození $s \in SExp$.

Důkaz: V bázi indukce ověříme vyhodnocení bázických prvků. Platí $Val(\mathbf{n}) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky.

V indukčním kroku se podíváme na vyhodnocení $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$. Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $Val((x) \oplus (y))$ měla být rovna součtu vyhodnocení výrazu x, což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení výrazu y, což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(y)$. Takže skutečně $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$.

Druhé pravidlo $Val((x) \odot (y))$ se dořeší analogicky. □

6.4 Uzávěry relací

Definice: Buď V (nějaká) vlastnost binárních relací. Řekneme, že V je *uzavíratelná*, pokud splňuje následující podmínky:

- Pro každou množinu M a každou relaci $R \subseteq M \times M$ existuje alespoň jedna relace $S \subseteq M \times M$, která má vlastnost V a pro kterou platí $R \subseteq S$.
- Nechť I je množina a nechť $R_i \subseteq M \times M$ je relace mající vlastnost V pro každé $i \in I$. Pak relace $\bigcap_{i \in I} R_i$ má vlastnost V. □

Fakt: Libovolná kombinace vlastností reflexivita, symetrie, tranzitivita je uzavíratelná vlastnost.

Antisymetrie není uzavíratelná vlastnost. □

Věta 6.9. *Nechť V je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Buď M množina a R libovolná binární relace na M. Pak pro množinu všech relací $S \supseteq R$ na M majících vlastnost V existuje infimum R_V (vzhledem k množinové inkluzi), které samo má vlastnost V.*

Tuto „nejmenší“ relaci R_V s vlastností V nazýváme V*-uzávěr* relace R.

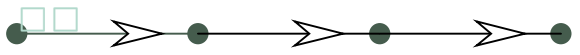
Tvrzení 6.10. Nechť R je binární relace na M. Pak platí následující poznatky.

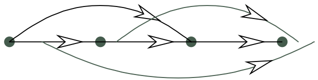
- *Reflexivní uzávěr* R je přesně relace $R \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$. □
- *Symetrický uzávěr* R je přesně relace
$$\overleftrightarrow{R} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ nebo } (y,x) \in R\}. \square$$
- *Tranzitivní uzávěr* R je přesně relace $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkce, která pro každou binární relaci S vrátí relaci
$$\mathcal{T}(S) = S \cup \{(x,z) \mid \text{ existuje } y \text{ takové, že } (x,y),(y,z) \in S\}$$
a $\mathcal{T}^i = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ je i-krát iterovaná aplikace funkce $\mathcal{T}$. □
- Reflexivní a tranzitivní uzávěr R je přesně relace $R^* = Q^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R. □
- Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr R (tj. nejmenší ekvivalence obsahující R) je přesně relace $(\overleftrightarrow{Q})^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R.
- Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží!

Neformálně:

- V-uzávěr relace je vlastně daný induktivní definicí podle vlastnosti V.
- Význam reflexivních a symetrických uzávěrů je z předchozího zřejmý.
- Význam tranzitivního uzávěru R^+ je následovný:

  Do R^+ přidáme všechny ty dvojice (x, z) takové, že v R se lze „dostat po šipkách" z x do z. Nakreslete si to na papír pro nějakou jednoduchou relaci, abyste význam tranzitivního uzávěru lépe pochopili.





- A jak bylo dříve řečeno, antisymetrický uzávěr relace prostě nemá smysl.
- Například buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto: $R = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pak R^* je běžné lineární uspořádání $\leq$ přirozených čísel.