

FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

Řešení sady problémů 4.

1. Nechť $A = (K, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ je konečný automat akceptující jazyk L .
Zkonstruujeme nejdříve nedeterministický konečný automat A' akceptující jazyk $\{a\}\{a, b\}^*\{a\}$.
 $A' = (K', \{a, b\}, \delta', 1, F')$, přičemž:

$$K' = \{1, 2, 3\};$$

$$F' = \{3\};$$

$$\delta' : \delta'(1, a) = \{2\}$$

$$\delta'(1, b) = \emptyset$$

$$\delta'(2, a) = \{2, 3\}$$

$$\delta'(2, b) = \{2\}$$

$$\delta'(3, a) = \delta'(3, b) = \emptyset$$

Automat \bar{A} akceptující jazyk $\bar{L} = L \cap \{a\}\{a, b\}^*\{a\}$ je kartézským součinem automatů A a A' .

$\bar{A} = (\bar{K}, \{a, b\}, \bar{\delta}, \bar{q}_0, \bar{F})$, přičemž:

$$\bar{K} = K \times K';$$

$$\bar{q}_0 = (q_0, 1);$$

$$\bar{F} = F \times F';$$

$$\bar{\delta} : \bar{\delta}((p, s), x) = \{(r, t) \mid r \in \delta(p, x); t \in \delta'(s, x)\}$$

pro všechna $p \in K; s \in K'; x \in \{a, b\}$.

2. Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je regulární gramatika, t.j. všechna její pravidla jsou tvaru $A \rightarrow xB$ anebo $A \rightarrow x$ ($A, B \in N, x \in \Sigma$). Proto odvození slova $w = x_2x_1$ v gramatice G je tvaru $S \Rightarrow^* x_2X \Rightarrow^* x_2x_1$. Vytvoříme gramatiku G' , která nejprve vygeneruje část x_1 , a pak část x_2 .

$G' = (N', \Sigma, P', S')$, přičemž množina neterminálů N' obsahuje symboly

$$N' = \{A_{i,Y} \mid A, Y \in N; i = 1, 2\} \cup \{S'\},$$

(S' je nový počáteční neterminál; neterminál $A_{i,Y}$ značí, že odvozování začalo neterminálem Y a odvozuje se slovo x_i).

Množina pravidel $P' = P_0 \cup P_1 \cup P_2$, kde

$$P_0 = \{S' \rightarrow Y_{1,Y} \mid Y \in N\}$$

(začínáme simulovat odvození slova x_1 od neterminálu Y)

$$P_1 = \{A_{1,Y} \rightarrow aB_{1,Y} \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{A_{1,Y} \rightarrow aS_{2,Y} \mid A \rightarrow a \in P\}$$

(simulace odvození $X \Rightarrow^* x_1$, resp. přechod na simulaci $S \Rightarrow^* x_2X$.)

$$P_2 = \{A_{2,Y} \rightarrow aB_{2,Y} \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{A_{2,Y} \rightarrow a \mid A \rightarrow aY \in P\}$$

(simulace odvození $S \Rightarrow^* x_2X$, resp. její ukončení, když je skutečně možné odvodit v G větu x_2Y a Y je neterminál, z kterého bylo generováno x_1 .)

3. Nejmenší třída jazyků, obsahující všechny konečné jazyky a uzavřená vzhledem k operacím sjednocení, průniku a komplement (v dalším ji budeme označovat \mathcal{T}) je vlastní podmnožinou množiny regulárních jazyků \mathcal{R} .

Inkluze $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$ je důsledkem uzávěrových vlastností třídy \mathcal{R} (konkrétně: každý konečný jazyk je regulární a třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operacím sjednocení, průniku a komplementu). Existence regulárního jazyka nepatřícího do třídy \mathcal{T} je důsledkem následujícího tvrzení:

T: Necht' $L \in \mathcal{T}$, $L \subseteq \Sigma^$. Pak buď jazyk L je konečný, anebo komplement jazyka L , $L^c = \Sigma^* - L$, je konečný.*

Nyní stačí uvážit jazyk $\{aa\}^*$. Jde o nekonečný regulární jazyk, kterého komplement $\{a\}\{aa\}^*$ je taky nekonečný, a podle předcházejícího tvrzení T nepatří do třídy \mathcal{T} .

Dokážeme platnost tvrzení T . Při důkazu vyjdeme z faktu, že každý jazyk L třídy \mathcal{T} vznikne konečným počtem operací \cup , \cap , c z konečných jazyků. Definujeme hloubku jazyka L , $hl(L)$, jako počet operací potřebných k vytvoření jazyka L takto:

$$hl(L) = \begin{cases} 0 & \text{když } L \text{ je konečný} \\ hl(L_1) + hl(L_2) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1 \cup L_2; L_1, L_2 \in \mathcal{T} \\ hl(L_1) + hl(L_2) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1 \cap L_2; L_1, L_2 \in \mathcal{T} \\ hl(L_1) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1^c; L_1 \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k hloubce jazyka L .

1° Necht' $L \in \mathcal{T}$ a $hl(L) = 0$. Pak jazyk L je konečný a tvrzení platí.

2° Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny jazyky hloubky menší než n ; $n > 0$. Dokážeme jej pro jazyky hloubky n . Předpokládejme proto, že $L \in \mathcal{T}$ a $hl(L) = n$. Pak L je nekonečný a platí jedna z následujících možností:

- $L = L_1 \cup L_2$, přičemž $hl(L_1) < n$, $hl(L_2) < n$ a nutně alespoň jeden z jazyků L_1 , L_2 je nekonečný. Podle indukčního předpokladu je buď L_1^c nebo L_2^c konečný. Ale $L^c = (L_1 \cup L_2)^c = L_1^c \cap L_2^c$, a proto komplement jazyka L je konečný.
- $L = L_1 \cap L_2$, přičemž $hl(L_1) < n$, $hl(L_2) < n$ a nutně oba jazyky L_1, L_2 jsou nekonečné. Pak ale podle indukčního předpokladu jejich komplementy jsou konečné. Ale $L^c = (L_1 \cap L_2)^c = L_1^c \cup L_2^c$, a proto jazyk L je konečný.
- $L = L_1^c$, přičemž $hl(L_1) < n$ a L_1^c je nekonečný. Pak ale podle indukčního předpokladu je L_1 konečný, a tedy i komplement jazyka L je konečný.