IB102 – úkol 2, příklad 2 – řešení   Odevzdání: 30. 9. 2013

Vypracoval(a):   UČO:
Skupina:

---

2. [2 body] Uvažme jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}.$$

Rozhodněte, zda je jazyk L regulární, a vaše tvrzení dokažte. Tzn.:

- Pokud L je regulární, uveďte regulární gramatiku, která L generuje, nebo konečný deterministický automat, který L akceptuje. Gramatiku/automat zapište se všemi formálními náležitostmi.
- Pokud L není regulární, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (Pumping lemma).

Řešení: *Jazyk L není regulární.*

Důkaz. Pro důkaz sporem předpokládejme, že jazyk L je regulární. Tudíž podle lemmatu o vkládání existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že libovolné slovo $w \in L$, jehož délka je alespoň n, lze psát ve tvaru $w = xyz$, kde $|xy| \le n, y \neq \varepsilon$ a $xy^iz \in L$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

- Buď tedy $n \in \mathbb{N}$ libovolné přirozené číslo, dále však pevné.
- Uvažme slovo $w = a^n b^n c^{2n}$. Délka w je $4n \ge n$ a w jistě patří do jazyka L.
- Slovo w lze tedy psát ve tvaru $w = xyz$, kde $|xy| \le n$ a $y \neq \varepsilon$. Libovolné rozdělení splňující tyto podmínky musí mít následující tvar:

$$\begin{aligned} x &= a^k & 0 &\le k < n \\ y &= a^l & 0 &< l \le n-k \\ z &= a^{n-k-l} b^n c^{2n} \end{aligned}$$

- Z lemmatu o vkládání víme, že $xy^iz \in L$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. Zejména tedy volbou $i = 0$ dostáváme $xy^0z = xz \in L$.
- Ale $xz \notin L$, neboť $xz = a^{n-l} b^n c^{2n}$ a $(n - l) + n \neq 2n$ (protože $l > 0$).
- Předpoklad regularity jazyka L tedy vede ke sporu, takže L regulární není.

$\square$