IB102 – úkol 3, příklad 1 – řešení   Odevzdání: 7. 10. 2013

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

1. [2 body] Uvažme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a uvažme jazyk L nad touto abecedou:

$$L = \{xwx \mid x \in \{a, b\}, w \in \{a, b\}^*\}$$

Najděte nějakou pravou kongruenci $\sim$ s konečným indexem takovou, že jazyk L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* podle $\sim$. Dokažte, že se jedná o pravou kongruenci, včetně důkazu, že se jedná o ekvivalenci.

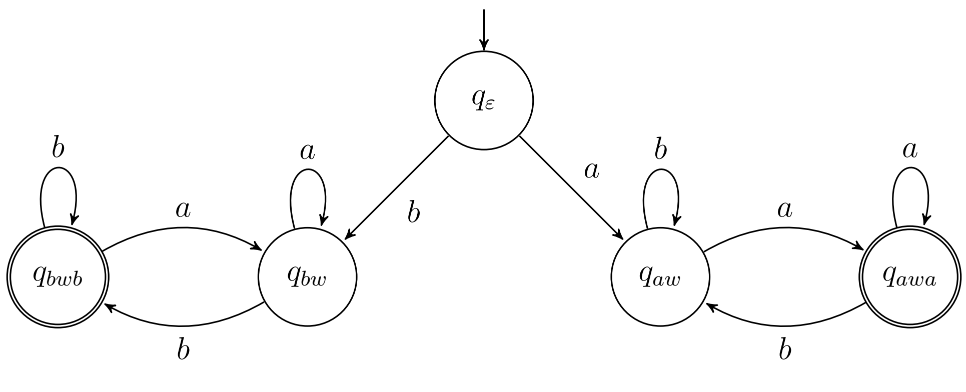
Rozhodněte, zda je jazyk regulární. Své rozhodnutí zdůvodněte.

Řešení

Pravou kongruenci $\sim$ s konečným indexem takovou, že L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* podle $\sim$, nejjednodušeji odvodíme z totálního deterministického konečného automatu pro jazyk L.

Nejprve si tedy navrhneme totální DFA $\mathcal{A}$ akceptující jazyk L:

$$\mathcal{A} = (\{q_\varepsilon, q_{aw}, q_{bw}, q_{awa}, q_{bwb}\}, \Sigma, \delta, q_\varepsilon, \{q_{awa}, q_{bwb}\})$$



Σ^* nyní můžeme rozdělit do disjunktních tříd rozkladu odpovídajících jednotlivým stavům automatu $\mathcal{A}$[1]:

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon &= L(q_\varepsilon) = \{\varepsilon\} \\
T_{aw} &= L(q_{aw}) = \{a\}.(\{a\}^*.\{b\}^+)^* \\
T_{bw} &= L(q_{bw}) = \{b\}.(\{b\}^*.\{a\}^+)^* \\
T_{awa} &= L(q_{awa}) = \{a\}.(\{b\}^*.\{a\}^+)^+ = T_{aw}.\{a\}^+ = \{a\}.\{a, b\}^*.\{a\} \\
T_{bwb} &= L(q_{bwb}) = \{b\}.(\{a\}^*.\{b\}^+)^+ = T_{bw}.\{b\}^+ = \{b\}.\{a, b\}^*.\{b\}
\end{aligned}$$

[1] Zde zápis $L(q)$, kde $q \in Q$ označuje jazyk akceptovaný automatem jehož definice je stejná jako definice automatu $\mathcal{A}$ až na množinu akceptujících stavů která je $\{q\}$.

IB102 – úkol 3, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 7. 10. 2013**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Slovní popis tříd rozkladu:

- T_ε je třída obsahující jen prázdné slovo. Prázdné slovo musí být ve třídě samo, protože dosud nevíme jakým písmem bude slovo začínat
- T_{aw} je třída slov, která začínají a a nepatří do jazyka L, nicméně mají potenciál do něj patřit pokud k nim bude přiřetězeno slovo končící na a. (Do této třídy patří také a.)
- T_{bw} – obdobně pro b
- T_{awa} je třída slov délky alespoň 2, která začínají na a a končí na a. Tedy všechna slova v této třídě rozkladu patří do L.
- T_{bwb} – opět obdobně pro b

Lze vidět přímo z definice tříd (nebo jejich popisu), že tyto třídy jsou skutečně disjunktní a zároveň jejich sjednocením je Σ^*, tedy tvoří rozklad množiny Σ^*.

Jazyk L je potom sjednocením tříd T_{awa} a T_{bwb}, tedy

$$L = T_{awa} \cup T_{bwb}$$

Relaci $\sim$ můžeme definovat pomocí výše zadefinovaných tříd rozkladu:

$$u \sim v \overset{def}{\iff} \exists X \in \{T_\varepsilon, T_{aw}, T_{bw}, T_{awa}, T_{bwb}\} : u \in X \wedge v \in X$$

(Tedy u je v relaci s v jestliže patří do stejné třídy rozkladu)

Takto definovaná relace $\sim$

- je reflexivní:

  Důkaz. Platí, že každé $x \in \Sigma^*$ patří do nějaké třídy rozkladu, tedy je jistě v relaci samo se sebou. □

- je symetrická

  Důkaz. Uvažme libovolná slova x, y taková, že $x \sim y$.
  Potom z definice $\sim$ plyne, že existuje třída rozkladu X taková, že $x \in X, y \in X$ a tedy jistě platí i $y \sim x$. □

- je tranzitivní

  Důkaz. Uvažme libovolná slova x, y, z taková, že $x \sim y$, $y \sim z$
  Potom z definice $\sim$ plyne, že existuje třída rozkladu X taková, že $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.
  Situace, kdy by x a y padly obě do nějaké třídy X a y a z padly do jiné třídy Y (tedy $x \in X, y \in X, y \in Y, z \in Y, X \neq Y$), nastat nemůže, protože jednotlivé třídy rozkladu jsou disjunktní.
  Tedy platí, že i $x \sim z$. □

- je pravá kongruence

  V následujícím textu budu proměnné označující prvky množiny Σ označovat podtrženými znaky ze začátku abecedy, tedy například $\underline{c}$ je proměnná, znaky abecedy budu psát normálně, například a, b.

  Důkaz. Podle tvrzení 2.21 z přednášky lze podmínku k tomu aby ekvivalence byla pravou kongruencí zformulovat jako

$$\forall u, v \in \Sigma^*, \underline{c} \in \Sigma : u \ \sim v \ \Rightarrow u\underline{c} \sim v\underline{c}$$

  Musíme zde tedy ukázat, že jsou-li libovolná 2 slova v relaci $\sim$, pak pokud k oběma přidáme libovolné písmeno ze Σ, výsledná slova budou opět v relaci $\sim$.
  Postupně probereme jednotlivé třídy rozkladu a jednotlivá $\underline{c} \in \Sigma$.

  - $u, v \in T_\varepsilon$: jediným slovem je ε, a tedy vždy $u = v$ a tedy i $\forall \underline{c} \in \Sigma : u\underline{c} = v\underline{c}$, proto z reflexivity $\sim$ platí $u\underline{c} \sim v\underline{c}$.
  - $u, v \in T_{aw}$:
    * přiřetězujeme $\underline{c} = a$: $ua, va \in T_{awa}$ (lze vidět z popisu T_{awa} a jeho vztahu k T_{aw})
      $T_{aw}.\{a\} \subseteq T_{awa}$
    * přiřetězujeme $\underline{c} = b$: $ub, vb \in T_{aw}$ (z popisu lze vidět, že můžeme přidat libovolný počet znaků b a stále zůstáváme v T_{aw})
      $T_{aw}.\{b\} \subseteq T_{aw}$
  - $u, v \in T_{awa}$:
    * přiřetězujeme $\underline{c} = a$: $ua, va \in T_{awa}$
      $T_{awa}.\{a\} \subseteq T_{awa}$
    * přiřetězujeme $\underline{c} = b$: $ub, vb \in T_{aw}$
      $T_{awa}.\{b\} \subseteq T_{aw}$
  - $u, v \in T_{bw}$: (chová se obdobně jako T_{aw})
    * přiřetězujeme $\underline{c} = a$: $ua, va \in T_{bw}$
      $T_{bw}.\{a\} \subseteq T_{bw}$
    * přiřetězujeme $\underline{c} = b$: $ub, vb \in T_{bwb}$
      $T_{bw}.\{b\} \subseteq T_{bwb}$
  - $u, v \in T_{bwb}$: (chová se obdobně jako T_{awa})
    * přiřetězujeme $\underline{c} = a$: $ua, va \in T_{bw}$
      $T_{bwb}.\{a\} \subseteq T_{bw}$
    * přiřetězujeme $\underline{c} = b$: $ub, vb \in T_{bwb}$
      $T_{bwb}.\{b\} \subseteq T_{bwb}$

  $\square$

Index relace $\sim$ je 5 (protože rozklad $\Sigma^*/_\sim$ je tvořen 5 množinami).

Jazyk L **je regulární** – nalezli jsme pravou kongruenci $\sim$ s konečným indexem takovou, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/_\sim$, tedy podle Myhill-Nerodovy věty je jazyk L regulární.