IB102 – úkol 3, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 7. 10. 2013**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

2. [2 body] Uvažme jazyk

$$L = \left\{ a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, \text{ pokud } i = 1, \text{ pak } j = k \right\}$$

Dokažte pomocí Myhill-Nerodovy věty, že jazyk L není regulární.

Důkaz, že jazyk L není regulární, povedeme sporem pomocí Myhill-Nerodovy věty.

Důkaz. Předpokládejme, že jazyk L je regulární, a tedy podle Myhill-Nerodovy věty má $\sim_L$ konečný index – označme ho jako k.
Uvažme nyní slova $ab, abb, \dots, ab^{k+1} \in \Sigma^*$. Těchto slov je více než je index $\sim_L \Rightarrow$ existují slova ab^i a ab^j, kde $i \neq j$, taková, že $ab^i \sim_L ab^j$, tj. pro každé $w \in \Sigma^*$ platí: $ab^i w \in L \Leftrightarrow ab^j w \in L$ (z definice $\sim_L$).
Uvažme nyní slovo $c^i \in \Sigma^*$. Přiřetězením tohoto slova ke slovu ab^i dostaneme $ab^i c^i \in L$, přiřetězením ke slovu ab^j dostáváme $ab^j c^i \notin L$ $(i \neq j)$, což je v rozporu s definicí $\sim_L$.
Máme tedy spor s předpokladem konečnosti indexu $\sim_L$, a tedy jazyk L není regulární. □

Bonus: [+2 body] Dokažte, že neregularitu jazyka L nelze dokázat pomocí Lemmatu o vkládání. Jinými slovy: nalezněte takové n, že pro každé $w \in L$ délky alespoň n existuje x, y, z takové, že $xyz = w, |xy| \leq n, y \neq \varepsilon$ a pro každé $i \geq 0$ platí: $xy^i z \in L$. Dokažte, že n má uvedené vlastnosti.

Dokážeme, že $n = 2$ má uvedené vlastnosti.

Důkaz. Každé slovo $w \in L$ je tvaru $a^j b^k c^l$, kde $j, k, l \geq 0$ a $k = l$, jestliže $j = 1$. Dále (podle definice PL) uvažujme pouze slova w, pro která platí $|w| \geq n$, tedy $j + k + l \geq 2$.
Uvažme tedy případy: $j = 1$ a $j \neq 1$.

- Pro $\boldsymbol{j = 1}$ rozdělíme slovo následovně: $x = \varepsilon, y = a, z = b^m c^m$, kde $m \geq 1$. Toto rozdělení splňuje uvedené podmínky ($|a| \leq 2, a \neq \varepsilon$).
  Nechť $i \in \mathbb{N}_0$ je libovolné, platí: $xy^i z = a^i b^m c^m \in L$ (z definice jazyka L, protože vždy platí $k = l = m$).
- Pro $\boldsymbol{j \neq 1}$ uvažme následující případy:
  - $\boldsymbol{w = b^k c^l}$, kde $k > 0, l \geq 0$. Pak $x = \varepsilon, y = b, z = b^{k-1} c^l$. Snadno ověříme, že toto rozdělení splňuje uvedené podmínky. Po napumpování dostáváme $w' = xy^i z = b^{i+k-1} c^l \in L$ (slovo je tvaru $b^k c^l$ a $\#_a(w') \neq 1$).
  - $\boldsymbol{w = c^l}$, kde $l \geq 2$. Pak $x = \varepsilon, y = c, z = c^{l-1}$. Opět se snadno ukáže, že je toto rozdělení korektní a po napumpování je $w' = xy^i z = c^{i+l-1} \in L$.
  - $\boldsymbol{w = aab^k c^l}$, kde $k, l \geq 0$. Pak $x = \varepsilon, y = aa, z = b^k c^l$ (platí $|aa| \leq 2, aa \neq \varepsilon$). Opět pro libovolné $i \in \mathbb{N}_0$ platí: $w' = (aa)^i b^k c^l \in L$ (při libovolném i je $\#_a(w') \neq 1$)
  - $\boldsymbol{w = a^j b^k c^l}$, kde $j \geq 3, k, l \geq 0$. Pak $x = \varepsilon, y = a, z = a^{j-1} b^k c^l$. Po napumpování dostáváme $w' = a^{i+j-1} b^k c^l \in L$ ($j \geq 3 \Rightarrow \#_a(w') > 1$)

□