IB102 – úkol 5, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 21. 10. 2013**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

1. [2 body] Tento úkol se skládá ze 3 nezávislých podúkolů:

a) Nechť R_1, R_2 jsou regulární jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ a platí $R_1 \subseteq R_2$. Rozhodněte a dokažte, zda libovolný jazyk L, pro který platí $R_1 \subseteq L \subseteq R_2$, je také regulární. **[0.5 bodu]**

b) Označme $\mathcal{P}$ třídu všech jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, které obsahují alespoň jedno slovo sudé délky. Rozhodněte a dokažte, zda je třída $\mathcal{P}$ uzavřená na následující operace:

- průnik,
- sjednocení,
- doplněk,
- rozdíl,
- zřetězení,
- mocnina (libovolná, včetně 0),
- iterace.

Pro každou uvedenou operaci buďto dokažte, že je na ni třída $\mathcal{P}$ uzavřená, nebo uveďte konkrétní protipříklad. **[1 bod]**

c) Uvažme libovolný jazyk X, který není kontextový, libovolný regulární jazyk R a libovolný ko-konečný jazyk K (jazyk je ko-konečný, je-li jeho doplněk konečný). Dále uvažme jazyk L definovaný následovně:

$$L = (R \setminus (\text{co-}K \cap X))^*$$

Rozhodněte a dokažte, zda je jazyk L regulární. **[0.5 bodu]**

a) **Tvrzení neplatí.**

Důkaz. Najdeme protipříklad, tj. jazyky R_1, R_2, L, pro než tvrzení neplatí. Uvažme $R_1 = \emptyset$ (prázdný jazyk) a $R_2 = \Sigma^*$ (jazyk všech slov nad abecedou Σ). Oba tyto jazyky jsou regulární a zjevně také $R_1 \subseteq R_2$. Neregulární jazyk vyhovující zadání je pak například jazyk $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (důkaz neregularity viz například skripta, příklad 2.15). Nalezli jsme tedy protipříklad a tedy tvrzení v obecnosti neplatí. $\square$

b) Uvažme postupně všechny operace ze zadání:

- Třída $\mathcal{P}$ **není** uzavřená na průnik.

  Důkaz. Uvažme jazyky $L_1 = \{a, ab\}$ a $L_2 = \{a, aa\}$. Zjevně $L_1, L_2 \in \mathcal{P}$. Průnikem získáme jazyk $L_1 \cap L_2 = \{a\}$, který již ale nepatří do třídy $\mathcal{P}$. $\square$

- Třída $\mathcal{P}$ **je** uzavřená na sjednocení.

  Důkaz. Uvažme libovolné 2 jazyky L_1, $L_2 \in \mathcal{P}$. Potom z definice $\mathcal{P}$ existuje nějaké slovo $w \in L_1$, které je sudé délky. Jelikož ale $L_1 \subseteq (L_1 \cup L_2)$, pak také $w \in (L_1 \cup L_2)$ a tedy $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{P}$. □

- Třída $\mathcal{P}$ **není** uzavřená na doplněk.

  Důkaz. Uvažme jazyk $L = \Sigma^* \setminus \{a\}$. Zjevně $aa \in L$ a tedy $L \in \mathcal{P}$. Doplňkem získáme jazyk $\mathsf{co}\text{-}L = \{a\}$, který již ale nepatří do třídy $\mathcal{P}$. □

- Třída $\mathcal{P}$ **není** uzavřená na rozdíl.

  Důkaz. Uvažme jazyky $L_1 = \{a, aa\}$ a $L_2 = \{aa\}$. Zjevně $L_1, L_2 \in \mathcal{P}$. Rozdílem získáme jazyk $L_1 \setminus L_2 = \{a\}$, který již ale nepatří do třídy $\mathcal{P}$. □

- Třída $\mathcal{P}$ **je** uzavřená na zřetězení.

  Důkaz. Uvažme libovolné 2 jazyky L_1, $L_2 \in \mathcal{P}$. Potom z definice $\mathcal{P}$ existují nějaká slova $w_1 \in L_1$ a $w_2 \in L_2$, která jsou sudé délky. Jelikož ale $w_1.w_2 \in L_1.L_2$, pak také $L_1.L_2 \in \mathcal{P}$, protože slovo $w_1.w_2$ je sudé délky. □

- Třída $\mathcal{P}$ **je** uzavřená na mocninu.

  Důkaz. Uvažme libovolný jazyk $L \in \mathcal{P}$. Potom z definice $\mathcal{P}$ existuje nějaké slovo $w \in L$, které je sudé délky. Pak platí, že w^k má sudou délku a $w^k \in L^k$ pro každou mocninu $k \geq 0$. Třída $\mathcal{P}$ je tedy uzavřena na mocninu. □

- Třída $\mathcal{P}$ **je** uzavřená na iteraci.

  Důkaz. Uvažme libovolný jazyk $L \in \mathcal{P}$. Z definice iterace zjevně platí $L \subseteq L^*$. Jelikož $L \in \mathcal{P}$, obsahuje L alespoň jedno slovo sudé délky. Pak ale L^* obsahuje také alespoň jedno slovo sudé délky a tedy $L^* \in \mathcal{P}$. □

c) **Tvrzení platí.**

Důkaz. Důkaz je složen z následujících 5 pozorování:

- Jazyk K je ko-konečný, jazyk $\mathsf{co}\text{-}K$ musí tedy být konečný.
- Průnik konečného jazyka s jakýmkoliv jiným jazykem je vždy konečný, tedy jazyk $\mathsf{co}\text{-}K \cap X$ musí být konečný.
- Každý konečný jazyk je regulární, jazyk $\mathsf{co}\text{-}K \cap X$ je tedy regulární.
- Regulární jazyky jsou uzavřeny na rozdíl, jazyk $R \setminus (\mathsf{co}\text{-}K \cap X)$ je tedy regulární.
- Regulární jazyky jsou uzavřeny na iteraci, jazyk $(R \setminus (\mathsf{co}\text{-}K \cap X))^*$ je tedy regulární.

□