IB102 – úkol 5, příklad 2 – řešení Odevzdání: 21. 10. 2013

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

2. [2 body] Nechť Σ je libovolná abeceda a $removeFirst : 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Sigma^*}$ je unární operace nad jazyky definovaná následovně:

$$removeFirst(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma \,.\, xw \in L\}$$

Intuitivně: $removeFirst(L)$ je jazyk, který vznikne z L odstraněním prvního písmene ze všech slov délky alespoň jedna. Například

$$removeFirst(\{\varepsilon, aa, aba\}) = \{a, ba\}$$
$$removeFirst(\{b, ab, abba\}) = \{\varepsilon, b, bba\}$$

Rozhodněte, zda je třída všech regulárních jazyků nad abecedou Σ uzavřená na operaci $removeFirst$, a vaše tvrzení dokažte. Tzn.:

- Pokud je vaše odpověď kladná, dokažte, že pro libovolný regulární jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk $removeFirst(L)$ také regulární.
- Pokud je vaše odpověď záporná, najděte abecedu Σ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$, který je regulární, ale jazyk $removeFirst(L)$ regulární není.

Řešení: *Třída všech regulárních jazyků nad abecedou Σ je uzavřená na operaci $removeFirst$ pro libovolnou abecedu Σ.*

Důkaz. Buď Σ libovolná abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ regulární jazyk. Pak existuje deterministický konečný automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, který jazyk L akceptuje. Ukážeme, jak zkonstruovat nedeterministický konečný automat s ε-kroky $\mathcal{A}'$, který akceptuje jazyk $removeFirst(L)$, a tudíž, že jazyk $removeFirst(L)$ je také regulární.

Automat $\mathcal{A}'$ zkonstruujeme tak, že k automatu $\mathcal{A}$ přidáme nový iniciální stav q_0' a z něj ε-přechody do všech stavů, do kterých se dá jedním krokem dostat z původního iniciálního stavu q_0. Tuto intuici nyní zachytíme formálně a ukážeme, že takto vytvořený automat skutečně akceptuje jazyk $removeFirst(L)$.

Buď $X \subseteq Q$ množina definovaná následovně:

$$X = \{\delta(q_0, x) \mid x \in \Sigma\}$$

Tedy X je přesně množina popsána výše – množina všech stavů, do kterých se dá v automatu $\mathcal{A}$ dostat ze stavu q_0 jedním krokem. Buď dále q_0' nový stav, tedy $q_0' \notin Q$. Definujeme novou přechodovou funkci $\delta' : (Q \cup \{q_0'\}) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$:

$$\begin{aligned}
\delta'(q, x) &= \{\delta(q, x)\} \text{ pro všechna } q \in Q \text{ a všechna } x \in \Sigma\\
\delta'(q, \varepsilon) &= \emptyset \text{ pro všechna } q \in Q\\
\delta'(q_0', x) &= \emptyset \text{ pro všechna } x \in \Sigma\\
\delta'(q_0', \varepsilon) &= X
\end{aligned}$$

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Pak hledaný automat $\mathcal{A}'$ je $(Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', F)$. Zbývá nám ukázat, že automat $\mathcal{A}'$ skutečně akceptuje jazyk $removeFirst(L)$ – tj. $L(\mathcal{A}') = removeFirst(L)$. Ukážeme obě inkluze:

Nejdříve ukážeme, že $L(\mathcal{A}') \subseteq removeFirst(L)$.

Nechť tedy $w = a_1 \dots a_n \in L(\mathcal{A}')$ je libovolné slovo akceptované automatem $\mathcal{A}'$ (kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_i \in \Sigma$ pro všechna $1 \leq i \leq n$). Tudíž v přechodovém grafu automatu $\mathcal{A}'$ existuje cesta

$$q_0' \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_{n+1}$$

pro nějaké stavy $q_1, \dots, q_n \in Q$ a $q_{n+1} \in F$. První přechod musí být pod slovem ε, protože podle definice funkce δ' ze stavu q_0' nevedou jiné přechody než ε-přechody. Z definice funkce δ' navíc víme, že $q_1 \in X$ a tedy existuje písmeno $x \in \Sigma$ takové, že $q_1 = \delta(q_0, x)$. Takže v přechodovém grafu automatu $\mathcal{A}$ existuje cesta

$$q_0 \xrightarrow{x} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_{n+1}$$

(protože automat $\mathcal{A}$ se na stavech z Q chová stejně jako automat $\mathcal{A}'$). Protože $q_{n+1} \in F$, automat $\mathcal{A}$ akceptuje slovo xw a proto $xw \in L$. A tedy $w \in removeFirst(L)$.

Dále ukážeme, že $removeFirst(L) \subseteq L(\mathcal{A}')$.

Nechť tedy $w = a_1 \dots a_n \in removeFirst(L)$ je libovolné (kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_i \in \Sigma$ pro všechna $1 \leq i \leq n$). Tedy z definice operace $removeFirst$ existuje $x \in \Sigma$ takové, že $xw \in L$. Tudíž v přechodovém grafu automatu $\mathcal{A}$ existuje cesta

$$q_0 \xrightarrow{x} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_{n+1}$$

pro nějaké stavy $q_1, \dots, q_n \in Q$ a $q_{n+1} \in F$. Pak z definice množiny X víme, že $q_1 \in X$. Takže $q_1 \in \delta'(q_0', \varepsilon)$ a proto v přechodovém grafu automatu $\mathcal{A}'$ existuje cesta

$$q_0' \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_{n+1}$$

(protože automat $\mathcal{A}'$ se na stavech z Q chová stejně jako automat $\mathcal{A}$). Protože $q_{n+1} \in F$, automat $\mathcal{A}'$ akceptuje slovo w a proto $w \in L(\mathcal{A}')$.

Celkově jsme dokázali $L(\mathcal{A}') = removeFirst(L)$, tudíž jazyk $removeFirst(L)$ je regulární, protože je akceptovaný nedeterministickým konečným automatem $\mathcal{A}'$.

$\square$