**IB102 – úkol 7, příklad 2 – řešení** **Odevzdání: 18. 11. 2013**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

**2. [2 body]** Buď $\Sigma = \{a, b, c\}$ abeceda a $L \subseteq \Sigma^*$ jazyk

$$L = \{a^m b^n c^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Rozhodněte, zda je jazyk $L$ bezkontextový, a vaše tvrzení dokažte. Tzn.:

- Pokud jazyk $L$ je bezkontextový, uveďte bezkontextovou gramatiku, která $L$ generuje, nebo zásobníkový automat, který $L$ akceptuje. Gramatiku/automat zapište se všemi formálními náležitostmi.
- Pokud jazyk $L$ není bezkontextový, dokažte tuto skutečnost pomocí lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky (pumping lemma pro CFL).

**Řešení:** *Jazyk $L$ není bezkontextový.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme obměnou lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky.

Tedy chceme dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje slovo $z \in L$ takové, že $|z| \geq n$ a pro všechna slova $u, v, w, x, y$ splňující $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$ existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $uv^iwx^iy \notin L$. Z obměny tvrzení lemmatu o vkládání pak vyplývá, že jazyk $L$ není bezkontextový. (Všimněte si, že díky *Poznámce 3.25* můžeme v tvrzení *Věty 3.24* místo konstant $p, q \in \mathbb{N}$ psát jedinou konstantu $n \in \mathbb{N}$).

- Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo, dále však pevné.
- Zvolíme slovo $z = a^n b^n c^{n^2}$. Jistě $z \in L$ a $|z| \geq n$.
- Buď $z = uvwxy$ libovolné rozdělení slova $z$, kde $vx \neq \varepsilon$, $|vwx| \leq n$. Pak pro tvar slova $vx$ mohou nastat následující případy:
  - $vx \in \{a\}^+$: Pak $vx = a^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ ($k > 0$). Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = uwy = a^{n-k}b^nc^{n^2}$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $(n-k)n = n^2 - kn < n^2$.
  - $vx \in \{b\}^+$: Analogicky
  - $vx \in \{c\}^+$: Pak $vx = c^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ ($k > 0$). Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = uwy = a^nb^nc^{n^2-k}$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $n^2 > n^2 - k$.
  - $vx \in \{a\}^+\{b\}^+$: Pak $vx = a^kb^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ ($k, l > 0$). Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = uwy = a^{n-k}b^{n-l}c^{n^2}$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $(n-k)(n-l) < n^2$.
  - $vx \in \{b\}^+\{c\}^+$: Pak $vx = b^kc^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ ($k, l > 0$). Navíc z podmínky $|vwx| \leq n$ vyplývá nerovnost $l \leq n - k < n \leq nk$, protože $k + l = |vx| \leq |vwx| \leq n$. Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = uwy = a^nb^{n-k}c^{n^2-l}$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $n(n-k) = n^2 - nk < n^2 - l$.

Jiné případy nastat nemohou, protože platí $|vwx| \leq n$, tudíž slovo $vx$ může obsahovat nejvíce dva různé znaky abecedy. Celkově jsme pro každé rozdělení našli $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že slovo $uv^iwx^iy \notin L$, a tedy podle lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky jazyk $L$ není bezkontextový. $\square$