IB102 – úkol 9, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 2. 12. 2013**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

2. [2 body] Nechť $\Sigma = \{a, b\}$ je abeceda a $L, R \subseteq \Sigma^*$ libovolné jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte.

(a) Pokud jazyk R je regulární a jazyk L je rekursivně spočetný, pak jazyk $L \setminus R$ je rekursivně spočetný.

(b) Pokud jazyk L je bezkontextový, pak jazyk $\{w\#w \mid w \in L\} \subseteq (\Sigma \cup \{\#\})^*$ je rekursivní.

Možná se vám bude hodit následující tvrzení, jehož platnost nemusíte dokazovat.

- Jazyk $\{w\#w \mid w \in \Sigma^*\} \subseteq (\Sigma \cup \{\#\})^*$ je rekursivní.

(a) **Tvrzení je pravdivé.**

Důkaz. Nechť $R \subseteq \Sigma^*$ je libovolný regulární jazyk a $L \subseteq \Sigma^*$ libovolný rekursivně spočetný jazyk. Podle *Věty 2.51* je třída regulárních jazyků uzavřená na doplňek. Tudíž jazyk $co - R$ je také regulární a zejména tedy rekursivně spočetný. A protože třída všech rekursivně spočetných jazyků je uzavřená na průnik (viz slajdy z 10. přednášky, strana 3), je jazyk

$$L \setminus R = L \cap co - R$$

rekursivně spočetný. □

(b) **Tvrzení je pravdivé.**

Důkaz. Nechť $L \subseteq \Sigma^*$ je libovolný bezkontextový jazyk. Podle *Věty 3.58* je třída bezkontextových jazyků uzavřená na operaci zřetězení. Tudíž jazyk

$$J = L.\{\#\}.L \subseteq (\Sigma \cup \{\#\})^*$$

je také bezkontextový a zejména tedy rekursivní. A protože třída rekursivních jazyků je uzavřená na průnik (viz slajdy z 10. přednášky, strana 3), je jazyk

$$\{w\#w \mid w \in L\} = J \cap \{w\#w \mid w \in \Sigma^*\}$$

rekursivní. □