IB102 – úkol 10, příklad 1 – řešení Odevzdání: 9. 12. 2013

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

1. [2 body] Dokažte, že následující jazyk není rekurzivní pomocí redukce z vhodného nerekurzivního jazyka.

$$L = \{<\mathcal{M}> \mid |L(\mathcal{M})| = 1\}$$

Tedy L je jazykem všech kódů Turingových strojů, které akceptují právě jedno slovo.

Dokážeme, že jazyk ACC (jazyk reprezentující problém akceptování uvedený na přednášce) se redukuje na jazyk L, tedy $ACC \leq_m L$.

Důkaz. Ukážeme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce f, pro kterou platí: $x \in ACC \Leftrightarrow f(x) \in L$. Z existence této funkce pak plyne, že $ACC \leq_m L$ a protože ACC není rekurzivní, nemůže být rekurzivní ani L.

Sestrojíme funkci f, která pro každé x vrátí kód TM $\mathcal{M}'$, který bude akceptovat slovo ε, jestliže $x \in ACC$, žádné slovo jinak. Toho docílíme tak, že $\mathcal{M}'$ nejprve zkontroluje, jestli je x tvaru $<\mathcal{M}, w>$, a poté simuluje stroj $\mathcal{M}$ na slově w. Skončí-li výpočet úspěšně, podívá se teprve na svůj vlastní vstup a akceptuje, jestliže má na vstupu ε.

Definujeme tedy funkci f pro každé x předpisem

$$f(x) = <\mathcal{M}'>,$$

kde $\mathcal{M}'$ je Turingův stroj, který se chová na vstupu y následovně:

- není-li y tvaru $<\mathcal{M}, w>$, zamítni
- spusť $\mathcal{U}$ na $<\mathcal{M}>\#<w>$ ($\mathcal{U}$ je univerzální TM, viz přednáška)
- pokud $\mathcal{U}$ přejde do akceptujícího stavu a
  - $y = \varepsilon$, akceptuj
  - $y \neq \varepsilon$, zamítni
- pokud $\mathcal{U}$ přejde do zamítajícího stavu, zamítni

Funkce f splňuje $x \in ACC \Leftrightarrow f(x) \in L$.

- $x \in ACC \Rightarrow f(x) \in L$
  - x není tvaru $<\mathcal{M}, w>$
    Pak $x \notin ACC$ a implikace triviálně platí.
  - x je tvaru $<\mathcal{M}, w>$
    Jestliže $<\mathcal{M}, w> \in ACC$, pak TS $\mathcal{M}$ akceptuje w, a tedy i univerzální TM $\mathcal{U}$ akceptuje $<\mathcal{M}>\#<w>$, a $\mathcal{M}'$ proto akceptuje jediné slovo (ε) $\Rightarrow <\mathcal{M}'> \in L \Rightarrow f(x) \in L$.
- $f(x) \in L \Rightarrow x \in ACC$
  Ukážeme obměnou ($x \notin ACC \Rightarrow f(x) \notin L$).

  Jestliže $x \notin ACC$, pak buď

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

- x není tvaru $<\mathcal{M}, w>$ a $\mathcal{M}'$ zamítá (nehledě na vstup) $\Rightarrow <\mathcal{M}'> \notin L \Rightarrow f(x) \notin L$.
- x je tvaru $<\mathcal{M}, w>$, ale $\mathcal{M}$ neakceptuje w (nebo na něm cyklí), pak ani $\mathcal{U}$ neakceptuje (nebo cyklí), a tedy $\mathcal{M}'$ neakceptuje žádné slovo $\Rightarrow <\mathcal{M}'> \notin L \Rightarrow f(x) \notin L$.

Zbývá ukázat, že funkce f je totálně vyčíslitelná. Výše popsaný postup nám dává algoritmus konstrukce $\mathcal{M}'$ na základě vstupu y, tedy podle Church-Turingovy teze existuje TM, který tento algoritmus realizuje, a tedy funkce f je vyčíslitelná.

Že je funkce totální vidíme přímo z jejího předpisu (je definována pro každé x a vždy vrátí odpovídající $\mathcal{M}'$).

Dokázali jsme tedy, že $ACC \leq_m L$ a protože ACC není rekursivní jazyk, nemůže být ani jazyk L rekursivní. $\square$