IB102 – úkol 10, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 9. 12. 2013**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

2. [2 body] Nechť Σ je libovolná abeceda a $A, B \subseteq \Sigma^*$ jsou jazyky nad touto abecedou. Dále nechť $HALT$ je jazyk problému zastavení. O jazyce L řekneme, že je netriviálním jazykem nad abecedou Σ, pokud $L \neq \emptyset$ a zároveň $L \neq \Sigma^*$.

Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá, a svá rozhodnutí zdůvodněte:

(a) A je regulární jazyk, B je netriviální rekursivní jazyk $\implies A \leq_m B$,

(b) $A \leq_m HALT \implies A$ není rekursivní.

Tvrzení (a) platí. Tedy pro každý regulární jazyk A a každý netriviální rekursivní jazyk B existuje redukce f, která redukuje A na B.

Důkaz. Jazyk B je netriviální, tedy existuje nějaké slovo w_B takové, že $w_B \in B$, a nějaké slovo $\widehat{w_B}$ takové, že $\widehat{w_B} \notin B$.

Poznámka: Samotná existence těchto slov je dostatečná k tomu, aby redukce existovala, a tedy i pro náš důkaz. Pokud byste však navíc chtěli mít důkaz konstruktivní, tak pro libovolný netriviální rekursivní jazyk můžeme tato slova algoritmicky najít v konečném čase. Například tak, že budeme postupně generovat všechna možná slova nad abecedou Σ a čekat na první slovo, které do jazyka B padne, a první, které do něj nepadne. Každý výpočet příslušnosti do B musí skončit (B je rekursivní). Zároveň jazyk B je netriviální, a tedy musí tato slova existovat – proto je v konečném čase nalezneme a výpočet skončí.

Nyní potřebujeme dokázat, že $A \leq_m B$, tedy vytvořit redukci f, tedy totálně vyčíslitelnou funkci, která zachovává příslušnost k jazyku:

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

Redukci f navrhneme tak, že rozhodne příslušnost slova x do jazyka A a výsledek tohoto rozhodnutí převede buď na slovo, které do jazyka B patří, nebo na takové, které do B nepatří[1]. Při tom využijeme toho, že jazyk A je regulární, a tedy existuje deterministický konečný automat $\mathcal{A}_A$, který jej akceptuje.

Redukci f zadefinujeme takto:

$$f(x) = \begin{cases} w_B & \text{jestliže } x \in A \\ \widehat{w_B} & \text{jestliže } x \notin A \end{cases}$$

Algoritmus pro výpočet $f(x)$:

- simulací DFA $\mathcal{A}_A$ na vstupu x rozhodneme, zda platí $x \in A$,
  - pokud $x \in A$, vrátíme na výstup slovo w_B;
  - pokud $x \notin A$, vrátíme na výstup slovo $\widehat{w_B}$.

[1] Toto je moment, kdy potřebujeme netrivialitu jazyka B, pro triviální jazyk B by tato konstrukce (a ani redukce) nebyla možná.

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Funkce f je vyčíslitelná – výše je uvedený algoritmický postup, tedy podle Church-Turingovy teze je tento postup realizovatelný pomocí TM. Výstup bude realizovat zápisem na pásku – využijeme toho, že máme jen dvě možnosti, jaká slova budeme zapisovat (pro dané B), a tedy můžeme tato slova zakódovat do přechodové funkce Turingova stroje, který f počítá.

Funkce f je totálně vyčíslitelná – každý z kroků algoritmu je totálně vyčíslitelný:

- výpočet DFA nemůže cyklit nad konečným slovem, tedy ani jeho simulace nemůže cyklit,
- na výstup dáváme konečné slovo, tedy opět nemůžeme cyklit.

Platí $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$:

- $w \in A \Rightarrow f(w) \in B$ – jestliže $w \in A$, pak DFA $\mathcal{A}_A$ musí akceptovat w, a tedy $f(w) = w_B$ a protože $w_B \in B$, tak $f(w) \in B$;
- $w \in A \Leftarrow f(w) \in B$ – dokážeme obměnou ($w \notin A \Rightarrow f(w) \notin B$) – jestliže $w \notin A$, pak DFA $\mathcal{A}_A$ zamítá w, tedy $f(w) = \widehat{w_B}$, a tedy $f(w) \notin B$.

Dokázali jsme, že existuje totálně vyčíslitelná redukce f z jazyka A na jazyk B, tedy platí:

$$A \leq_m B.$$

Kde A je libovolný regulární jazyk a B je libovolný netriviální rekursivní jazyk, tedy tvrzení (a) platí. □

Tvrzení (b) neplatí. Tedy není pravda, že pokud se jazyk A redukuje na $HALT$, tak A není rekurzivní[2].

Důkaz. Například jazyk $A = \Sigma^*$ jistě je regulární, a tedy i rekursivní, nicméně se redukuje na $HALT$.

V důkazu budeme potřebovat Turingův stroj, který zastaví pro libovolné slovo (například jej akceptuje). Tento TM označíme $\mathcal{M}_Z$.

Jelikož redukujeme z Σ^*, potřebujeme, aby platilo $f(x) \in HALT$ pro všechna x, stačí nám tedy fixně vracet kód dvojice $\mathcal{M}_Z$ a libovolné slovo.

Tedy redukci f zadefinujeme takto:

$$f(x) = <\mathcal{M}_Z, \varepsilon>$$

Tato funkce je zřejmě totálně vyčíslitelná, jednoduše dává na výstup neustále stejnou fixní hodnotu.

Zároveň platí

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in HALT$$

[2] Naopak dokonce libovolný rekursivní jazyk se redukuje na $HALT$ – k tomu můžeme použít podobnou argumentaci jako u části (a).

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

- $x \in A \Rightarrow f(x) \in HALT$ – platí, protože $\mathcal{M}_Z$ zastaví pro libovolné slovo, tedy speciálně i pro ε, a tedy kód dvojice $<\mathcal{M}_Z, \varepsilon>$ jistě náleží jazyku $HALT$,
- $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin HALT$ – platí triviálně, protože $A = \Sigma^*$, a tedy neexistuje $x \notin A$.

A tedy platí

$$A \leq_m HALT.$$

Dokázali jsme, že existuje rekursivní jazyk A takový, že $A \leq_m HALT$, tedy tvrzení (b) neplatí. $\square$