

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

1. [2 body] Definujme jazyk TRIPLE-SAT následovně:

$$\text{TRIPLE-SAT} = \{ \langle \Phi \rangle \mid \text{Booleovská formule } \Phi \text{ má alespoň 3 různá splňující přiřazení} \}$$

Dokažte, že jazyk TRIPLE-SAT je NP-úplný. Vaší úlohou je tedy ukázat, že TRIPLE-SAT je NP-těžký (nejlépe redukcí z nějakého jiného NP-těžkého problému) a zároveň, že patří do třídy NP. Použitou redukcí co nejpřesněji popište a zdůvodněte, proč se jedná o polynomiální redukcí.

Ukážeme, že TRIPLE-SAT je NP-těžký a že patří do třídy NP.

### TRIPLE-SAT je NP-těžký

Abychom ukázali, že TRIPLE-SAT je NP-těžký, musíme dokázat, že pro každý jazyk  $L \in \text{NP}$  platí  $L \leq_p \text{TRIPLE-SAT}$ . Toho nejsnadněji docílíme tak, že ukážeme polynomiální redukcí z nějakého NP-úplného jazyka (například jazyka SAT) na jazyk TRIPLE-SAT. Tím zajistíme výše požadované, jelikož

- každý  $L \in \text{NP}$  se polynomiálně redukuje na jazyk SAT (SAT je NP-úplný),
- SAT se polynomiálně redukuje na jazyk TRIPLE-SAT (jak níže ukážeme) a
- složení dvou polynomiálních redukcí po sobě dokážeme simulovat v polynomiálním čase.

Nyní tedy stačí sestavit polynomiální redukční funkci z jazyka SAT na jazyk TRIPLE-SAT. Uvažme libovolnou Booleovskou formuli  $\Phi$  a dvě čerstvé (tedy nevyskytující se ve formuli  $\Phi$ ) výrokové proměnné  $\alpha$  a  $\beta$ . Sestrojme novou formuli  $\Phi'$  následovně:

$$\Phi' = (\Phi) \wedge (\alpha \vee \beta)$$

Formuli  $\Phi'$  umíme lehce sestavit v polynomiálním čase, jelikož vznikne z formule  $\Phi$  pouze přidáním závorek a části  $\wedge(\alpha \vee \beta)$  s konstantní délkou. Nyní stačí ukázat, že právě tato transformace představuje hledanou redukční funkci, tedy že platí

$$\langle \Phi \rangle \in \text{SAT} \Leftrightarrow \langle \Phi' \rangle \in \text{TRIPLE-SAT},$$

což podle definice znamená  $\text{SAT} \leq_p \text{TRIPLE-SAT}$ . Oba směry implikace ukážeme zvlášť.

„ $\Rightarrow$ “ Formule  $\Phi'$  je splněna v ohodnocení, ve kterém je splněna  $\Phi$ , a navíc je splněno buď  $\alpha$  nebo  $\beta$  (nebo obě). Jestliže tedy existuje splňující ohodnocení pro  $\Phi$ , umíme jej snadno rozšířit na tři různá splňující ohodnocení  $\Phi'$  – v jednom bude pravdivá  $\alpha$  a  $\beta$  ne, ve druhém naopak a ve třetím budou splněny obě. Zavedme tato ohodnocení formálně:

Nechť  $\Gamma: \text{Var} \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  je splňující ohodnocení formule  $\Phi$ . Pak ohodnocení  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  definovaná níže jsou zjevně různými splňujícími ohodnoceními formule  $\Phi'$ .

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} \text{true} & \text{jestli } x = \alpha \\ \text{false} & \text{jestli } x = \beta \\ \Gamma(x) & \text{jinak} \end{cases}$$

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

$$\Gamma_2(x) = \begin{cases} false & \text{jestli } x = \alpha \\ true & \text{jestli } x = \beta \\ \Gamma(x) & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\Gamma_3(x) = \begin{cases} true & \text{jestli } x = \alpha \\ true & \text{jestli } x = \beta \\ \Gamma(x) & \text{jinak} \end{cases}$$

„ $\Leftarrow$ “ Ze struktury formule  $\Phi'$  vyplývá, že každé její splňující ohodnocení splňuje také původní formuli  $\Phi$  ( $\Phi'$  je konstruována jako konjunkce). Tím je tento směr implikace dokázán.

### TRIPLE-SAT patří do třídy NP

Jazyk TRIPLE-SAT, stejně jako SAT, má intuitivní polynomiální verifikátor – pokud mu dodáme tři ohodnocení, lehce ověří, zdali jsou splňující (jednoduše postupně vyhodnotí zadanou formuli pro každé ohodnocení). Rozhodnout, zdali jsou tato ohodnocení navzájem různá v polynomiálním čase také není problém (sekvenčně je procházíme, dokud nenajdeme proměnnou, v níž se ohodnocení liší).

Turingův stroj akceptující jazyk TRIPLE-SAT si na začátku může nedeterministicky zvolit doplňkovou informaci (tři splňující ohodnocení) pro formuli na vstupu a pak simulovat výše uvedený polynomiální verifikátor. Pokud by formule na vstupu nepatřila do jazyka, nelze zvolit doplňkovou informaci tak, aby bylo slovo akceptováno (kdyby to šlo a verifikátor by slovo akceptoval, dostali bychom spor s předpokladem, že formule na vstupu nepatří do jazyka TRIPLE-SAT).

Jazyk TRIPLE-SAT tedy náleží do NP.

### Závěr

Jelikož TRIPLE-SAT patří do třídy NP a je NP-těžký, pak je z definice NP-úplný.