

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

**2. [2 body]**

(a) Připomeňme definici třídy coNP:

$$\text{coNP} = \{\text{co-}L \mid L \in \text{NP}\}.$$

Dokažte, že platí inkluze  $P \subseteq \text{NP} \cap \text{coNP}$ . Tedy ukažte, že každý jazyk  $L \in P$  splňuje  $L \in \text{NP}$  a zároveň  $L \in \text{coNP}$ .

(b) Neformálně zdůvodněte, proč každý regulární jazyk  $R$  splňuje  $R \in \text{TIME}(n)$ . Tedy vysvětlete, proč pro každý regulární jazyk existuje Turingův stroj, který ho rozhoduje, a navíc má lineární časovou složitost vzhledem k délce vstupního slova.

**Bonus: [+1 bod]** Úlohu (b) dokažte formálně. Přesně popište převod konečného deterministického automatu na jazykově ekvivalentní Turingův stroj. Zdůvodněte, proč má Turingův stroj, který vznikne touto konstrukcí, lineární časovou složitost.

(a) Nejprve dokážeme, že třída  $P$  je uzavřená na doplněk. Pokud pro libovolný jazyk  $K \in P$  existuje deterministický Turingův stroj, který ho rozhoduje s polynomiální časovou složitostí, záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu získáme deterministický Turingův stroj, který rozhoduje jazyk  $\text{co-}K$ . Skutečně, pokud původní stroj slovo akceptoval, nový stroj ho zamítá (a naopak). Navíc záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu se nezmění počet kroků výpočtu, tudíž nový stroj má také polynomiální časovou složitost. A tedy  $\text{co-}K \in P$  pro libovolné  $K \in P$ .

Nechť  $L \in P$  je libovolný jazyk. Ukážeme, že pak platí  $L \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ .

Z předchozího tvrzení vyplývá, že také jazyk  $\text{co-}L \in P$ . Protože každý jazyk  $L \in P$  náleží také do NP (třída  $P$  je podtřídou třídy NP – na každý deterministický Turingův stroj lze nahlížet jako na speciální případ nedeterministického Turingova stroje), víme také, že  $L \in \text{NP}$  a  $\text{co-}L \in \text{NP}$ . Protože  $\text{co-}L \in \text{NP}$ , z definice třídy coNP vyplývá  $L \in \text{coNP}$ . Celkově tedy platí  $L \in \text{NP} \cap \text{coNP}$  pro libovolný jazyk  $L \in P$ , což jsme měli dokázat.

(b) Pokud je  $R$  regulární jazyk, existuje nějaký totální deterministický konečný automat  $\mathcal{A}$ , který ho rozpoznává. Na základě tohoto automatu můžeme sestavit Turingův stroj, který bude mít stejné stavy jako automat  $\mathcal{A}$  a navíc přidáný nový akceptující a zamítající stav. Tento Turingův stroj bude vstupní slovo postupně číst zleva doprava a bude simulovat chování automatu  $\mathcal{A}$  (tj. přepínat se do odpovídajících stavů). Pokud po dočtení slova stroj skončí ve stavu, který byl v původním automatu akceptující, přepne se do nového akceptujícího stavu. Jinak se přepne do zamítajícího stavu.

Navíc tento Turingův stroj pro každé vstupní slovo  $w$  udělá  $|w| + 2$  kroků:  $|w|$  kroků při čtení slova, jeden při přechodu z levé koncové značky na první písmeno vstupního slova a jeden při přepínání do akceptujícího/zamítajícího stavu – a proto platí  $R \in \text{TIME}(n)$ .

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

Tuto intuici nyní zachytíme formálně. Buď tedy  $\Sigma$  libovolná abeceda a  $R \subseteq \Sigma^*$  libovolný regulární jazyk nad touto abecedou. Protože jazyk  $R$  je regulární, existuje totální deterministický konečný automat  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , který ho akceptuje. Na základě tohoto automatu zkonstruujeme nový Turingův stroj

$$\mathcal{M} = (Q \cup \{q_{accept}, q_{reject}\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup\}, \delta', q_0, q_{accept}, q_{reject}).$$

Kde přechodová funkce

$$\delta': Q \times (\Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup\}) \rightarrow (Q \cup \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times (\Sigma \cup \{\triangleright, \sqcup\}) \times \{L, R\}$$

je určena předpisem

$$\begin{aligned} \delta'(q, a) &= (\delta(q, a), a, R) \text{ pro každé } q \in Q \text{ a každé } a \in \Sigma, \\ \delta'(q, \triangleright) &= (q_0, \triangleright, R) \text{ pro každé } q \in Q, \\ \delta'(q, \sqcup) &= (q_{accept}, \sqcup, R) \text{ pro každé } q \in F, \\ \delta'(q, \sqcup) &= (q_{reject}, \sqcup, R) \text{ pro každé } q \in Q \setminus F. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že Turingův stroj je deterministický a  $\mathcal{M}$  akceptuje slovo  $w$ , právě když ho akceptoval automat  $\mathcal{A}$ . Nyní zjistíme časovou složitost tohoto Turingova stroje. Nechť tedy  $w = w_1w_2 \dots w_n$  je libovolné slovo délky  $n$ , kde  $w_i \in \Sigma$  pro každé  $1 \leq i \leq n$ . Pro každé  $1 \leq i \leq n$  označme  $q_i$  stav, ve kterém se nachází automat  $\mathcal{A}$  po přečtení  $i$  znaků ze slova  $w$  – tedy  $q_i = \widehat{\delta}(q_0, w_1w_2 \dots w_i)$ .

Turingův stroj  $\mathcal{M}$  je zkonstruován tak, že přechodová funkce stroje  $\mathcal{M}$  respektuje přechodovou funkci automatu  $\mathcal{A}$ , v každém kroku se čtecí hlava posune doprava a nikdy se nemění obsah pásky. Proto výpočet Turingova stroje  $\mathcal{M}$  na slově  $w$  je

$$(q_0, \triangleright w \sqcup^\omega, 0) \vdash_{\mathcal{M}} (q_0, \triangleright w \sqcup^\omega, 1) \vdash_{\mathcal{M}} (q_1, \triangleright w \sqcup^\omega, 2) \vdash_{\mathcal{M}} \\ \vdash_{\mathcal{M}} (q_2, \triangleright w \sqcup^\omega, 3) \vdash_{\mathcal{M}} \dots \vdash_{\mathcal{M}} (q_n, \triangleright w \sqcup^\omega, n+1) \vdash_{\mathcal{M}} (q_{end}, \triangleright w \sqcup^\omega, n+2),$$

kde  $q_{end}$  je buď  $q_{accept}$ , nebo  $q_{reject}$  (podle toho, jestli automat  $\mathcal{A}$  slovo  $w$  akceptuje, nebo neakceptuje).

Tedy časová složitost stroje  $\mathcal{M}$  je funkce  $T_{\mathcal{M}}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  definovaná pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  vztahem

$$T_{\mathcal{M}}(n) = n + 2.$$

Tudíž jazyk  $R$  je rozhodovaný nějakým Turingovým strojem se složitostí  $T_{\mathcal{M}}(n) \in \mathcal{O}(n)$ , a proto  $R \in \text{TIME}(n)$ .