Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

# Cvičení k předmětům IB005 Formální jazyky a automaty a IB102 Automaty, gramatiky a složitost

poslední modifikace 12. března 2014

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podílelo mnoho studentů a cvičící předmětů *IB005* a *IB102* Jiří Barnat, Vojtěch Řehák a Jan Strejček.

# Formální jazyky, regulární gramatiky

**1.1** Jsou dány jazyky $L_1$, $L_2$ nad abecedou $\{x, y, z\}$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

a) $L_1 \cup L_2$
b) $L_1 \cap L_2$
c) $L_1 \cdot L_2$, $L_2 \cdot L_1$
d) $L_2^0$, $L_2^1$, $L_2^2$, $L_2^3$, $L_2^*$, $L_2^+$
e) $co - L_2$

**1.2** Vypočítejte:

a) $\emptyset^*$, $\emptyset^+$, $\{\varepsilon\}^*$, $\{\varepsilon\}^+$
b) $\emptyset \cup \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap L$, $\{\varepsilon\} \cap L$
c) $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cdot L$, $\{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\} \cdot L$

**1.3** Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

a) Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.
b) Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.
c) Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.
d) Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.
e) Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.
f) Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků $L_1, L_2$ ?
   Pro pokročilé: platí $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$?
g) Rozhodněte, zda platí
   - $aabaabc \in L_2^4$
   - $baaabc \in L_2^6$
   - $ababc \in L_2^3$
h) Popište $co - L_2$ (komplement jazyka $L_2$).

**1.4** Buď $L$ libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

a) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$
b) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$
c) najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

**1.5** Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

**1.6** Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

**1.7** Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace ($^*, ^+$) a doplňku ($co-$ ) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

a) obsahují alespoň 2 znaky $a$
b) mají sudou délku
c) začínají znakem $a$ a končí znakem $b$
d) začínají a končí stejným znakem
e) obsahují podslovo $aba$
f) splňují b) a c)
g) nesplňují b)

**1.8** Pro libovolné jazyky $L_1,\ L_2,\ L_3$ dokažte, zda platí, nebo neplatí:

a) $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
b) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
c) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
d) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
e) $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
f) $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
g) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

**1.9** Jaký jazyk generuje gramatika $G$ a jakého je typu?

a) $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllll}
P = \{ & S & \rightarrow & aSb & \mid & cAd, \\
 & cA & \rightarrow & aB & \mid & Ca, \\
 & Bd & \rightarrow & Sb & \mid & A, \\
 & Cad & \rightarrow & ab & \mid & \varepsilon \ \}
\end{array}
$$

b) $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & bS & \mid & cS & \mid & aA, & & & & & & \\
 & A & \rightarrow & aA & \mid & bA & \mid & cA & \mid & a & \mid & b & \mid & c \ \}
\end{array}
$$

**1.10** Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů $(S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11})$.

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & aA & \mid & bB & \mid & \varepsilon, \\
 & A & \rightarrow & aS & \mid & bC, & & \\
 & B & \rightarrow & aC & \mid & bS, & & \\
 & C & \rightarrow & aB & \mid & bA \ \} & &
\end{array}
$$

**1.11** Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

a) $L = \{a, b, c, d\}^*$

b) $L = \{a, b, c, d\}^i\{a, b, c, d\}^*; i = 2, 10, 100$

c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$

d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k,\ k \geq 0\}$

e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ obsahuje podslovo $abb\}$

f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*$, první 3 znaky $w =$ poslední 3 znaky $w\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ neobsahuje podslovo $abb\}$

i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1,\ k, l \geq 0\}$

j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $5\}$

k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $3\}$

l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $25\}$

# Deterministické konečné automaty, pumping lemma

**2.1** Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

a) Uveďte jinou formu zápisu automatu.

b) Popište jazyk akceptovaný konečným automatem $A$.

c) Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\};\ \delta(q_3, a) = q_0$

**2.2** Konstruujte **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

a) $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$

b) $\{w \mid w \in \{a\}^*;\ |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l;\ k, l \geq 0\}$

c) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$

d) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$

e) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$

f) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$

g) $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$

h) $(\{a\} \cup \{b\} \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\}) \cdot \{b\})^*$

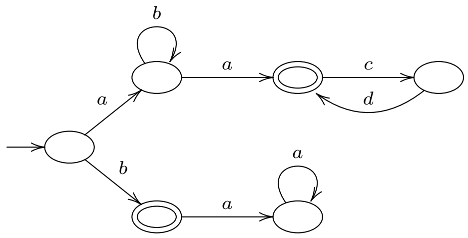
**2.3** Konstruujte **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

a) $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$

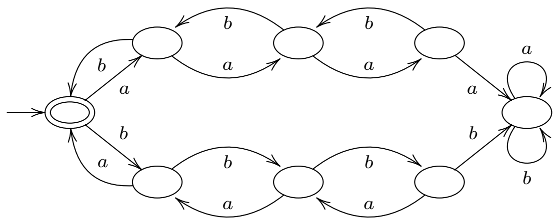
b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje slovo } babb\}$

c) $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

**2.4** Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace ($^*, ^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



**2.5** Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)




**2.6** Pomocí **věty o vkládání** dokažte, že jazyk L není regulární:

a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ \#_a(w) = \#_b(w)\}$

c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

d) $L = \{a^n | n = 2^i;\ i \geq 0\}$

e) $L = \{a^i b^j | i \neq j;\ i, j \geq 0\}$

f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} | n \geq 0\}$

g) $L = \{c^i a^j b^k | j \leq k;\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$

**2.7** Pro pokročilé: Zkonstruujte konečný automat $A$ rozpoznávající jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že $L(A) = L$.

**2.8** Konstruujte **deterministické** FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

# Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

**3.1** Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\to 1$ | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 2 |
| 3 | 3 | 5 |
| $\leftarrow 4$ | 12 | 2 |
| $\leftarrow 5$ | 7 | 8 |
| 6 | 4 | 9 |
| 7 | 12 | 11 |
| 8 | 4 | 6 |
| 9 | 10 | 8 |
| $\leftarrow 10$ | 3 | 2 |
| $\leftarrow 11$ | 12 | 6 |
| 12 | 3 | 10 |

b)

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\leftrightarrow 1$ | 3 | 2 |
| 2 | 6 | 4 |
| 3 | 3 | 5 |
| $\leftarrow 4$ | 4 | 2 |
| 5 | 10 | 8 |
| 6 | 6 | 7 |
| $\leftarrow 7$ | 7 | 5 |
| $\leftarrow 8$ | 8 | 2 |
| $\leftarrow 9$ | 11 | 2 |
| 10 | 10 | 9 |
| $\leftarrow 11$ | 11 | 5 |

**3.2** Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převeďte do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\to 1$ | 5 | 2 |
| 2 | 2 | 8 |
| 3 | 2 | 7 |
| $\leftarrow 4$ | 9 | 4 |
| 5 | 2 | 1 |
| 6 | 2 | 5 |
| $\leftarrow 7$ | 8 | 6 |
| 8 | 2 | 4 |
| 9 | 8 | 9 |

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\to 1$ | 4 | 2 |
| 2 | 2 | 5 |
| 3 | 3 | 6 |
| 4 | 4 | 2 |
| $\leftarrow 5$ | 5 | 3 |
| $\leftarrow 6$ | 6 | 2 |

b)

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 |
| $\rightarrow$ 2 | 9 | 4 |
| 3 | – | 1 |
| $\leftarrow$ 4 | 9 | 4 |
| 5 | 8 | 5 |
| 6 | 5 | 4 |
| $\leftarrow$ 7 | 6 | 9 |
| 8 | 11 | – |
| 9 | 7 | 9 |
| 10 | 12 | 3 |
| 11 | 8 | 1 |
| 12 | – | 10 |

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| A | B | A |
| $\leftarrow$ B | C | A |
| C | D | E |
| D | D | D |
| $\rightarrow$ E | A | E |

**3.3** Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 **a)** je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| A | A | C |
| $\rightarrow$ B | D | A |
| $\leftarrow$ C | D | A |
| D | C | D |

**3.4** Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

a) $L = \{w \in \{a,b,c,d\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abbc$ nebo $bba$ nebo $aba\}$

b) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abbc$ nebo $acbca$ nebo $bcabb\}$

c) $L = \{w \in \{a,b,c,d\}^* \mid w$ končí řetězcem $aaaa\}$

d) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ má čtvrtý symbol od konce $1\}$

e) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ končí řetězcem $01011\}$

f) $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$

g) $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

**3.5** K daným nedeterministickým FA zkonstrujte deterministické FA.

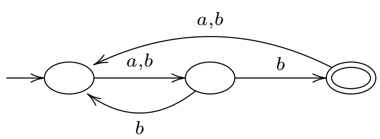
a)

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ 1 | {2,3} | {3,4} | {1} |
| $\leftarrow$ 2 | {3} | {4} | {2} |
| 3 | {1,2,3} | {1} | {3,4} |
| 4 | {1} | {1} | {3,4} |

b)

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ 1 | {1,2} | {1} | {1} |
| $\leftarrow$ 2 | $\emptyset$ | {3} | $\emptyset$ |
| 3 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | {4} |
| 4 | {5} | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 5 | $\emptyset$ | {6} | $\emptyset$ |
| 6 | {7} | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $\leftarrow$ 7 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

**3.6** Popište jazyk akceptovaný automatem:




**3.7** Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x,y\}$?

**3.8** Dokažte, že neexistuje automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ |w| = 5k, k \in \mathbb{N}_0\}$

**3.9** Najděte a formálně popište alespoň dvě relace $\sim \subseteq \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$ splňující podmínky Nerodovy věty pro jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ w \text{ obsahuje podslovo } abb\}.$$

Určete indexy těchto relací.

**3.10** Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhill-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a) $L = \{a^n \mid n = 2^i,\ i \geq 0\}$
b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n,\ n, m > 0\}$
c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^+\}$
d) $L = \{a^i b^j | i \neq j;\ i, j \geq 0\}$

**3.11** Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 3k,\ k \geq 0\}$

**3.12** Každý jazyk jednoznačně určuje relaci $\sim_L$ předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé $w$ platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

a) $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$
b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

**3.13** Nechť $\Sigma = \{a,b\}$. Uvažte následující relace na množině $\Sigma^*$:

a) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$
b) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ nebo $u$ i $v$ končí na stejné písmeno
c) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ a $u$ i $v$ končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk $L$ takový, že $\sim_L = \sim$. Nakonec nalezněte jazyk $L'$, který je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$, ale přitom $\sim_{L'} \neq \sim$.

# Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, $\varepsilon$-kroky, Kleeneho věta

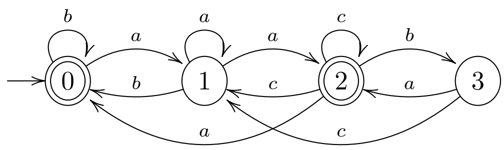
**4.1** Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$
\begin{array}{l}
G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllllll}
S & \rightarrow & aA & \mid bC & \mid a & \mid \varepsilon, & \\
A & \rightarrow & bB & \mid aA & \mid b & \mid c, & \\
B & \rightarrow & aB & \mid bC & \mid aC & \mid cA & \mid c, \\
C & \rightarrow & a & \mid b & \mid aA & \mid bB\ \} &
\end{array}
\end{array}
$$

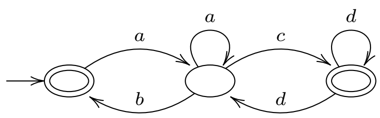
**4.2** Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$
\begin{array}{l}
G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllll}
S & \rightarrow & aX & \mid bY & \mid c, \\
X & \rightarrow & bX & \mid bS, & \\
Y & \rightarrow & bS & \mid cZ, & \\
Z & \rightarrow & aS & \mid b & \mid c\ \}
\end{array}
\end{array}
$$

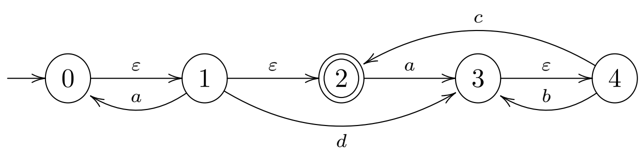
**4.3** Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



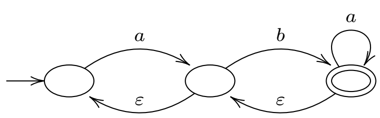

**4.4** Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



**4.5** K danému automatu s $\varepsilon$-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez $\varepsilon$-kroků.




**4.6** K danému automatu s $\varepsilon$-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez $\varepsilon$-kroků.



**4.7** K danému automatu s $\varepsilon$-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez $\varepsilon$-kroků.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| $\to 1$ | {1,2} | $\emptyset$ | $\emptyset$ | {2} |
| 2 | {5} | {3,5} | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 3 | $\emptyset$ | {6} | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 4 | $\emptyset$ | {4} | $\emptyset$ | {1,5} |
| 5 | {5} | $\emptyset$ | {3} | {6} |
| $\leftarrow 6$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | {3,6} | {2} |

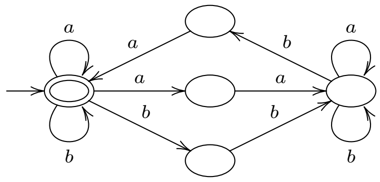
**4.8** K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní FA

a) $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$

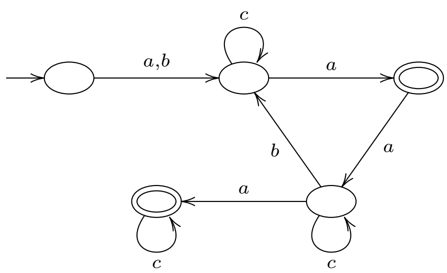
b) $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$

c) $(((a + b)^* + c)^* + d)^*$

**4.9** K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz




**4.10** K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz




**4.11** Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ končí na $ab\}$

b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$

c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ začíná a končí stejným symbolem $\}$

d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

**4.12** Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků $\mathcal{R}$ a nejmenší třídou

a) $M_1$, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku $(\cup, \cdot, \cap)$.

b) $M_2$, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu $(\cup, \cap, co-\ )$.

c) $M_3$, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině $(\cup, \cap, ^n)$.

# Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

**5.1** Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky $L_1, L_2, L_3, \ldots$ regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

**5.2** Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků $L_1, L_2, L_3, \ldots$ aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

**5.3** Nechť $L_1, L_2$ jsou **ne**regulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvraťte, zda je či není regulární:

a) $L_1 \cap L_2$
b) $L_1 \cup L_2$
c) $L_1 \smallsetminus L_2$
d) $L_1 \cdot L_2$
e) $L_1^*$
f) $co{-}L_1$

**5.4** Nechť $L_1$ je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk $L_2$ je nutně neregulární?

**5.5** Platí následující implikace?

a) $L_1$ je regulární, $L_2$ je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
b) $L_1$ je regulární, $L_2$ je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
c) $L_1$ je regulární, $L_2$ je neregulární $\Rightarrow L_1 \smallsetminus L_2$ je neregulární
d) $L_1$ je regulární, $L_2$ je neregulární $\Rightarrow L_1 \smallsetminus L_2$ je regulární
e) $L_1$ je regulární, $L_2$ je neregulární $\Rightarrow L_2 \smallsetminus L_1$ je neregulární
f) $L_1$ je regulární, $L_2$ je neregulární $\Rightarrow L_2 \smallsetminus L_1$ je regulární

**5.6** **Def:** operace $\odot$ rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky $L_1$ a $L_2$ regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky $L_1$ a $L_2$, aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

**5.7** Nechť $L$ je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^{\#}$ jsou regulární:

a) $L^{\#} = \{v \mid \text{existuje } u \text{ takové, že } u.v \in L\}$
b) $L^{\#} = \{w \mid \text{existuje } x, y, z \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

**5.8** Dokažte, že pro libovolný jazyk $L$ a libovolný konečný jazyk $K$ platí:

a) $L$ je regulární $\iff$ $L \cup K$ je regulární

b) $L$ je regulární $\iff$ $L \smallsetminus K$ je regulární

**5.9** **Def:** Homomorfismus $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

**Def:** Nechť $L$ je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$
**Def:** Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že $\mathcal{R}$ je uzavřena na $h, h^{-1}$.

**5.10** Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus $h$; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

**5.11** Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus $h$; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaaabaa)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in N\}$

**5.12** Dokažte nebo vyvraťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

# Bezkontextové gramatiky

**6.1** Co generují tyto gramatiky?

a) $G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{llllll} P = \{ & S & \rightarrow & aB & \mid bA & \mid \varepsilon, \\ & A & \rightarrow & aS & \mid bAA, & \\ & B & \rightarrow & bS & \mid aBB \} & \end{array}$$

b) $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{lllll} P = \{ & S & \rightarrow & aAS & \mid a, \\ & A & \rightarrow & ba & \mid Sba \} \end{array}$$

**6.2** Pro následující gramatiku

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{lllll} P = \{ & S & \rightarrow & AaB & \mid BaA, \\ & A & \rightarrow & AB & \mid a, \\ & B & \rightarrow & BB & \mid b \ \} \end{array}$$

a) najděte derivační strom s výsledkem *bbbbaa*

b) je tento strom určený jednoznačně?

c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo *bbbbaa*

d) je gramatika jednoznačná?

e) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

**6.3** Jaké mají charakteristikcé vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

**6.4** Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

**6.5** Odpovězte zda pro

$G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$, kde

$P = \{ \ S \rightarrow SSS \mid a \ \}$

a) je gramatika jednoznačná?

b) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

**6.6** Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

**6.7** Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná?

**6.8** Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \rightarrow & aA & \mid bB, & & \\ & A & \rightarrow & aAB & \mid aa & \mid AC & \mid AE, \\ & B & \rightarrow & bBA & \mid bb & \mid CB & \mid BF, \\ & C & \rightarrow & DE, & & & \\ & D & \rightarrow & cc & \mid DD, & & \\ & E & \rightarrow & FF & \mid FE, & & \\ & F & \rightarrow & EcE \ \} & & & \end{array}$$

**6.9** Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

**6.10** Je jazyk generovaný gramatikou $G$ bezkontextový?

$G = (\{S,T\},\{x,y\},P,S)$, kde

$$P = \{ \begin{array}{lcl} S & \to & xT, \\ T & \to & Sx, \\ xTx & \to & y \ \} \end{array}$$

**6.11** Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f) $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a,b,c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

# Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

**7.1** Odstraňte $\varepsilon$-pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{rlllllll} P = \{ & S & \rightarrow & ABC, & & & & \\ & A & \rightarrow & AbA & \mid BC, & & & \\ & B & \rightarrow & bB & \mid b & \mid cBbAa & \mid \varepsilon, & \\ & C & \rightarrow & cD & \mid c & \mid Ab & \mid \varepsilon, & \\ & D & \rightarrow & SSS & \mid b \; \} & & & \end{array}$$

**7.2** Odstraňte $\varepsilon$-pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{rllllll} P = \{ & S & \rightarrow & ABC, & & & \\ & A & \rightarrow & Ab & \mid BC, & & \\ & B & \rightarrow & bB & \mid b & \mid Ab & \mid \varepsilon, \\ & C & \rightarrow & cD & \mid c & \mid Ac & \mid \varepsilon, \\ & D & \rightarrow & SSS & \mid cSAc \; \} & & \end{array}$$

**7.3** Odstraňte $\varepsilon$-pravidla:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{rllllll} P = \{ & S & \rightarrow & 1X & \mid Y1 & \mid XZ, \\ & X & \rightarrow & 0YZ1 & \mid S1X & \mid Y, \\ & Y & \rightarrow & 1 & \mid X1 & \mid \varepsilon, \\ & Z & \rightarrow & SZ & \mid 0 & \mid \varepsilon \; \} \end{array}$$

**7.4** Význam konstrukce množin $N_\varepsilon$ na příkladu

$$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{rllllll} P = \{ & A & \rightarrow & BC & \mid a & \mid \varepsilon, \\ & B & \rightarrow & aB & \mid ACC & \mid b, \\ & C & \rightarrow & cC & \mid AA & \mid c \; \} \end{array}$$

**7.5** Odstraňte jednoduché pravidla. Diskuse o významu $N_A$.

$$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{rlllll} P = \{ & S & \rightarrow & X & \mid Y, \\ & A & \rightarrow & bS & \mid D, \\ & D & \rightarrow & ba, & \\ & B & \rightarrow & Sa & \mid a, \\ & X & \rightarrow & aAS & \mid C, \\ & C & \rightarrow & aD & \mid S, \\ & Y & \rightarrow & SBb \; \} & \end{array}$$

**7.6** Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{rllllll} P = \{ & S & \rightarrow & SaSbS & \mid aAa & \mid bBb, & \\ & A & \rightarrow & aA & \mid aaa & \mid B & \mid \varepsilon, \\ & B & \rightarrow & Bb & \mid bb & \mid b \; \} & \end{array}$$

**7.7** Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllllll} P = \{ & S & \to & 0H1 & \mid & 1L0 & \mid & \varepsilon, & \\ & H & \to & HH & \mid & 0H1 & \mid & LH & \mid \varepsilon, \\ & L & \to & LL & \mid & 1L0 & \mid & HL & \mid \varepsilon \} \end{array}$$

**7.8** Navrhněte gramatiku v CNF:

a) $L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$

b) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**7.9** Nechť $G$ je gramatika v CNF. Nechť $w \in L(G), |w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova $w$ v $G$?

**7.10** Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllllll} P = \{ & S & \to & Aa & \mid Bb & \mid aaA & \mid SaA & \mid SbB, \\ & A & \to & AAb & \mid ab & \mid SBb, & & \\ & B & \to & Bbb & \mid BBB & \mid bAb \} & & \end{array}$$

**7.11** Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \to & A1 & \mid 0 & \mid 1B, \\ & A & \to & BS0 & \mid 10 & \mid SB0, \\ & B & \to & 0B & \mid B1B & \mid S0 \} \end{array}$$

**7.12** Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \to & Xc & \mid Yd & \mid Yb, \\ & X & \to & Xb & \mid a, & \\ & Y & \to & SaS \} & & \end{array}$$

**7.13** Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{llllllll} P = \{ & S & \to & TTt & \mid Tt & \mid TS & \mid s, \\ & T & \to & SsT & \mid TsT & \mid t \} & \end{array}$$

**7.14** Transformujte do Greibachové NT. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{llllll} P = \{ & A & \to & BC, & \\ & B & \to & CD & \mid AB, \\ & C & \to & Aa & \mid b, \\ & D & \to & bA & \mid DD \} \end{array}$$

**7.15** Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

a) $L = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

c) $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\}$

# Zásobníkové automaty

**8.1** Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, d, A) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} \\
\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} &
\end{array}$$

- Načrtněte stavový diagram ZA $A$.
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu $a^4b^2c$ (stačí na obrázku).
- Popište jazyk $L(A)$.

**8.2** Je daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\
\delta(q_1, a, Y) = \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}
\end{array}$$

a) Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.

b) Popište jazyk akceptovaný automatem s původním $F$, tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

**8.3** Konstruujte ZA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

a) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 1\}$

d) $L = \{a^{3n+2} b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$

e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$

f) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$

g) $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$

h) $L = \{a^{n+m} b^{m+p} c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$

i) $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^k b^k c^m \mid k, m \geq 1\}$

j) $L = \{a^{k_1} b a^{k_2} b \ldots b a^{k_r} \mid r > 1,\ k_i \geq 1\ (i = 1, \ldots, r;\ \text{existuje } p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

**8.4** Daný ZA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$\begin{array}{l}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} \\
\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{array}$$

**8.5** Daný ZA $A = (\{q\}, \{(,)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned}
\delta(q, (, Z) &= \{(q, L)\}\\
\delta(q, (, L) &= \{(q, LL)\}\\
\delta(q, ), L) &= \{(q, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

**8.6** Pro danou $G$ navrhněte (rozšířený) ZA, který provádí syntaktickou analýzu:

a) shora dolů,

b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *abababaa*.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{aligned}
P = \{\ S &\to \varepsilon \mid abSA,\\
A &\to AaB \mid aB \mid a,\\
B &\to aSS \mid bA\ \}
\end{aligned}$$

**8.7** Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převeďte na standardní zásobníkový automat.

**8.8** Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset\})$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a, A) = \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) = \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) = \{(q_0, A)\}
\end{array}$$

# Uzávěrové vlastnosti CFL

**9.1** O každé z následujících implikací rozhodněte zda je pravdivá

a) $L_1$, $L_2$ bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový

b) $L_1$ bezkontextový $\wedge$ $L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový

c) $L_1$ regulární $\wedge$ $L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

d) $L_1$ konečný $\wedge$ $L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

**9.2** Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
$$R = L((a^*b^+a)^* + a^*)$$

Navrhněte ZA pro jazyk $L \cap R$

$$\begin{array}{lll}
\delta_L(q_0,x,Z) = \{(q_0,xZ)\} & \forall x \in \{a,b\} & \delta_R(p_0,a) = p_0 \\
\delta_L(q_0,x,y) = \{(q_0,xy)\} & \forall x,y \in \{a,b\} & \delta_R(p_0,b) = p_1 \\
\delta_L(q_0,\varepsilon,x) = \{(q_1,x)\} & \forall x \in \{a,b,Z\} & \delta_R(p_1,b) = p_1 \\
\delta_L(q_1,x,x) = \{(q_1,\varepsilon)\} & \forall x \in \{a,b\} & \delta_R(p_1,a) = p_0 \\
\delta_L(q_1,\varepsilon,Z) = \{(q_2,Z)\} & & \\
F_L = \{q_2\} & & F_R = \{p_0\}
\end{array}$$

**9.3** Je dána bezkontextová gramatika
$G = (\{S\},\{a,b\},P,S)$, kde
$P = \{\ S \ \rightarrow \ aS \ \mid \ Sb \ \mid \ a\ \}$

a) Má tato gramatika vlastnost sebevložení?

b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevložení?

c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?

d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevložení a regularitou?

**9.4** Je dán bezkontextový jazyk $L$, $L \subseteq \{a,b\}^*$
Zkonstruujeme nový jazyk $L_1$ takto:

a) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ xy \in L\}$

b) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ yx \in L\}$

Dokažte, že $L_1$ je taky bezkontextový.

# Konstrukce Turingových strojů

**10.1** Navrhněte determinstický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

**10.2** Navrhněte deterministický jednopáskový TS se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru $0^*1^*$ jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

**10.3** Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásky) TS pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

**10.4** Navrhněte TS (determ. nebo nedeterm.) TS pro jazyk:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$

b) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

c) $L = \{a^p \mid p \text{ není prvočíslo }\}$

d) $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis čísla } n\}$

# Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

**11.1** Objsaněte rozdíl mezi pojmy TS akceptuje a TS rozhoduje.

**11.2** Je daný DTS $T$ (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhněte k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{array}{ll} \delta(q, \rhd) = (q, \rhd, R) & \delta(q, a) = (p, A, R) \\ \delta(p, b) = (q, a, L) & \delta(q, \sqcup) = (p, A, R) \\ \delta(p, \sqcup) = (q, a, L) & \delta(q, a) = (q_{accept}, A, R) \end{array}$$

Kde $\rhd$ je levá koncová značka, $\sqcup$ označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, $q$ je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\rhd, \sqcup, A, a, b\}$.

**11.3** O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

a) $R$ je regulární, $L$ je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární

b) $L$ je rekurzivní $\Rightarrow$ co-$L$ je rekurzivní

c) $L$ je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní

d) $L$ je kontextový $\Rightarrow$ co-$L$ je rekurzivní

e) $L$ není rekurzivní $\Rightarrow co{-}L$ není rekurzivní

f) $L$ není rekurzivní a $R$ je rekurzivní $\Rightarrow L \smallsetminus R$ není rekurzivní

g) $L$ není rekurzivní, $R$ je rekurzivní a $R \subseteq L \Rightarrow L \smallsetminus R$ není rekurzivní

**11.4** Navrhněte gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n$ je mocnina $2\}$

**11.5** Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w$ je kód dvojice $(A, v)$ takové, že TS $A$ zastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

**11.6** Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

# Redukce

**12.1** Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

a) $A \leq_m B \Rightarrow co{-}A \leq_m co{-}B$

b) $A \leq_m B$ a $B$ je regulární $\Rightarrow A$ je regulární

c) $A$ je rekurzivně spočetná a $co{-}A \leq_m A \Rightarrow A$ je rekurzivní

d) $A$ je rekurzivně spočetná a $A \leq_m co{-}A \Rightarrow A$ je rekurzivní

e) $A \leq_m B$ a $A$ je rekurzivní $\Rightarrow B$ je rekurzivní

f) $A$ je rekurzivně spočetná $\Rightarrow A \leq_m HALT$

**12.2** Je dán jazyk $A = \{\langle M\rangle \mid$ výpočet TS $M$ na slově $\varepsilon$ je konečný$\}$.
Dokažte, že $A$ není rekurzivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na $A$)
Je jazyk $A$ rekurzivně spočetný?
Je komplement jazyka $A$ rekurzivně spočetný?

**12.3** Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[\frac{aa}{a}\right], \left[\frac{ab}{abab}\right], \left[\frac{b}{a}\right], \left[\frac{aba}{b}\right] \right\}$$

**12.4** Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu $\{0, 1\}$.

**12.5** Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.

# Složitost

**13.1** Rozhodněte, které z následujících vztahů platí. Odpovědi zdůvodněte.

a) $2n \in \mathcal{O}(n)$
b) $n^2 \in \mathcal{O}(n)$
c) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n^2)$
d) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$
e) $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$
f) $3n^2 + 4n + 17 \in \mathcal{O}(n^2 - n + 1)$
g) $(2n)! \in \mathcal{O}(n!^2)$

**13.2** Rozhodněte, zda platí následující vztah. Odpověď zdůvodněte.

$$g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \quad \Longrightarrow \quad f(n) \in o(g(n))$$

**13.3** Dokažte, že třída $\mathsf{P}$ je uzavřená na operace sjednocení, komplement a zřetězení. Rozhodněte, na které z těchto operací je uzavřena třída $\mathsf{NP}$. Odpověd zdůvodněte.

**13.4** Třída $\mathsf{coNP}$ je definována jako $\mathsf{coNP} = \{co{-}L \mid L \in \mathsf{NP}\}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí. Odpovědi zdůvodněte.

a) $\mathsf{coNP} = co{-}\mathsf{NP}$
b) $L_1, L_2 \in \mathsf{coNP} \implies L_1 \cap L_2 \in \mathsf{coNP}$
c) $L_1 \in \mathsf{NP}, L_2 \subsetneq L_1, L_2 \in \mathsf{coNP} \implies L_1 \smallsetminus L_2 \in \mathsf{NP}$

**13.5** Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné. U splnitelných formulí popište nějaké splňující přiřazení.

a) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$
b) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
c) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
d) $(u \vee \neg v \vee \neg w) \wedge (w \vee \neg y \vee z) \wedge (w \vee \neg z \vee x) \wedge (x \vee y \vee z)$
e) $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

**13.6** Dokažte, že následující problémy jsou $\mathsf{NP}$-úplné.

a) Problém Hamiltonovské cesty v grafu:
$\mathit{HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ je orientovaný graf obsahující Hamiltonovskou cestu z $s$ do $t\}$
b) Problém $k$-kliky ($k$-klika je úplný podgraf s $k$ vrcholy):
$\mathit{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G$ je neorientovaný graf s $k$-klikou$\}$
c) Problém podgrafového izomorfismu (Subgraph Isomorphism, SGI):
$\mathit{SGI} = \{\langle H, G\rangle \mid H = (V, E), G = (U, F)$ jsou neorientované grafy takové, že existuje injektivní zobrazení $f : V \to U$ splňující $(u, u') \in E \Longrightarrow (f(u), f(u')) \in F\}$

**13.7** Určete vztahy inkluze/rovnost mezi následujícími dvojicemi složitostních tříd. Svoje tvrzení zdůvodněte.

a) $\mathsf{TIME}(n^2)$ a $\mathsf{TIME}(n^3)$
b) $\mathsf{SPACE}(2n^2)$ a $\mathsf{SPACE}(100n^2)$
c) $\mathsf{SPACE}(n^2)$ a $\mathsf{TIME}(n^2)$
d) $\mathsf{NSPACE}(n^2)$ a $\mathsf{SPACE}(n^5)$
e) $\mathsf{P}$ a $\mathsf{TIME}(2^n)$

**13.8** Zkonstruujte jednopáskový deterministický Turingův stroj, který rozhoduje jazyk $L = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$ v čase $\mathcal{O}(n \log n)$. Není nutné uvádět formální popis stroje.

# Zadání cvičení IB005

## 1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte základní terminologii a definice
- Připomeňte základní operace nad jazyky a přitom cvičte příklady 1.1 a 1.2
- Cvičte 1.3, u 1.3 d) nacvičte "neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem".
- Cvičte 1.4
- Cvičte 1.6
- Cvičte 1.7
- Cvičte 1.8 b) a c) (jednu inkluzi skutečně dokažte)
- Připomeňte pojem gramatiky
- Cvičte 1.9
- Dle zbývajícího času, jinak za DÚ, přiklady 1.10, 1.11

## 2. cvičení: Konečné automaty a regulární gramatiky

- K čemu slouží Konečné automaty?
- Na příkladu 2.1 vysvětlete co jsou a jak fungují konečné automaty
- Uveďte formální definici DFA
- Příklad 2.2a-d,f (!deterministické FA!)
- Příklad 2.2g,h volitelně dle času
- Příklad 2.3a
- Příklad 2.4
- Příklad 2.5
- Příklad 1.11

## 3. cvičení: Pumping lemma, (Myhill-)Nerodova věta

- Znění a použití Pumping Lemma pro regulární jazyky
- Příklad 2.6a poctivě, b zrychleně, g poctivě, e zrychleně
- Znění Nerodovy věty a Myhill-Nerodovy věty
- Vztah $\sim$ a deterministických automatů a vztah $\sim_L$ a mininimálního automatu

- Příklad 3.9
- Příklad 3.12
- Příklad 3.10 jednu odrážku pořádně, další případně zrychleně

## 4. cvičení: Minimalizace a kanonizace DFA, nedeterministické FA a determinizace

- Připomeňte si $\sim_L$.
- Definujte minimální konečný automat.
- Příklad 3.2
- Příklad 3.3
- Definujte nedeterministikcé FA, a způsob akceptování NFA.
- Příklad 3.4
- Příklad 3.5
- Upozorněte, ze pro minimalizaci, je třeba vyjít z deterministického automatu.

## 5. cvičení: Ekvivalence FA, regulárních gramatik a regulárních výrazů, $\varepsilon$-kroky, Kleeneho věta

- Vysvětlete princip transfomrace odstranění $\varepsilon$-kroků
- Příklad 4.7
- Zopakujte vyjadřovací ekvivalenci dosud známých formalismů
- Formulujte podstatu algoritmů pro převod FA na regulární gramatiky a zpět
- Příklad 4.2
- Příklad 4.4
- Připomeňte si definici regulárních výrazů (syntax a sémantika)
- Příklad 4.11
- Princip transformace regulárních výrazů na FA a zpět
- Příklad 4.8 c)
- Příklad 4.10
- Příklad 4.12 a) a diskuze k 4.12 b)

## 6. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Příklad 5.1
- Příklad 5.2
- Příklad 5.3a – formulujte formalní konstrukci synchronního součinu
- Příklad 5.3b-f – slovní argumentace (hint důkazu) proč ano či ne
- Příklad 5.4
- Příklad 5.5
- Příklad 5.6
- Příklad 5.7 – formální konstrukce

## 7. cvičení: Bezkontextové gramatiky a derivační stromy, redukovaná CFG

- Připomeňte CFG a ukažte jak vypadá a jak funfuje CFG pro $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Příklad 6.1
- Příklad 6.2
- Příkald 6.3
- Příklad 6.4
- Příklad 6.5
- Příklad 6.6
- Příklad 6.8
- Příklad 6.9
- Příklad 6.10
- Příklad 6.11 (dle času)
- Příklad 6.7 rozmyslet za DÚ

## 8. cvičení: Normální formy CFG

- Připomeňte princip ostraňování $\varepsilon$-pravidel
- Příklad 7.2
- Připomeňte princip ostraňování jednoduchých pravidel
- Příklad 7.5
- Definujte Chomského NF (CNF) a připomeňte postup převodu CFG do CNF
- Příklad 7.6
- Příklad 7.8b)
- Příklad 7.9
- Vysvětlete odtranění přímé levé rekurze na `A->Ab|Ac|d|e`
- Příklad 7.12

## 9. cvičení: Zásobníkové automaty a syntaktická analýza

- Příklad 8.1 (zadejte přechodovou relaci tabulkou $[q_0 Z/a \to (q_0, AZ)]$
- Příklad 8.2
- Příklad 8.3b
- Příklad 8.6
- Příklad 8.8
- Diskutujte ekvivalence způsobu akceptování zás. automatů a podstatu převodu
- Zbude-li čas, cvičte příklady 8.4, 8.5 a 8.7

## 10. cvičení: Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků a pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- Příklad 7.15
- Příklad 9.1
- Příklad 9.2 (není nutné konstruovat celou přechodovou funkci)
- Příklad 9.3
- Příklad 9.4 (formální konstrukce)

## 11. cvičení: Konstrukce Turingových strojů

- Připomeňte jak fungují Turingovy stroje
- Příklad 10.1
- Příklad 10.2
- Příklad 10.3
- Příklad 10.4 – formulujte princip algoritmu pro TS

## 12. cvičení: Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

- Příklad 11.1
- Diskutujte vztah TS acceptuje/rozhoduje a gramatiky typu 0
- Příklad 11.2
- Příkald 11.3
- Příklad 11.4a
- Příklad 11.4b-d pouze myšlenky fungování CFG
- Příklad 11.5
- Příklad 11.6

## 13. cvičení: Redukce

# Zadání cvičení IB102

## 1. cvičení: Operace nad jazyky, gramatiky

- Připomeňte pojmy abeceda, jazyk, slovo apod.
- Připomeňte základní operace nad jazyky a přitom cvičte příklady 1.1 a 1.2.
- Píklad 1.3 d) e) f) h). U d) vysvětlete, že neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem.
- Příklad 1.4.
- V sudých skupinách cvičte příklad 1.5, v lichých příklad 1.6.
- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8 b). Zdůrazněte, že dva jazyky jsou stejné, právě když platí obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$. Jednu inkluzi dokažte.
- Příklad 1.8 c). Pozor, rovnost neplatí.
- Připomeňte pojem gramatiky a cvičte příklad 1.9 a) anebo b).
- Pokud vám zbyde čas, cvičte příklady 1.10 a 1.11.

## 2. cvičení: Deterministické konečné automaty, pumping lemma

- Příklad 1.11 a) d) (pokud jste nestihli na prvním cvičení).
- Příklad 2.1.
- Příklad 2.2 a) b) c) d). Dejte prosím studentům možnost, aby se pokusili alespoň nějaký automat sestrojit sami. Pozor, automaty musí být deterministické.
- Příklad 2.3 a) b).
- Příklad 2.4.
- Příklad 2.6. Z lehčích příkladů **a)–c)** udělejte jeden pořádně, ostatní zrychleně. Dále udělejte pořádně jeden zajímavější příklad, nejlépe **g)**. Zbyde-li čas, projděte zrychleně i ostatní příklady, zejména **e)**. Upozorněte studenty, že vlastní text důkazu zůstává v podstatě stejný (důkaz lze prezentovat jako formulář, který se vždy na pár místech doplní).

## 3. cvičení: Myhill-Nerodova věta

- Zopakujte Myhill-Nerovou větu a pojmy, které využívá. Zdůrazněte následující aspekty:
  1. Z DFA lze odvodit pravou kongruenci s konečným indexem takovou, že $L$ je sjednocení nějakých tříd ekvivalence. Zopakujte, jak se to dělá.
  2. Z takové pravé kongruence lze odvodit DFA (samotná kongruence neurčuje koncové stavy, ty určí až $L$). Zopakujte, jak se to dělá.

3. Pro každý jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ (i neregulární) je $\sim_L$ vždy pravá kongruence a $L$ je sjednocením nějakých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$. Má-li $\sim_L$ konečný index, lze sestrojit DFA pro $L$ a $L$ je tudíž regulární.
4. $\sim_L$ je nejhrubší ze všech pravých kongruencí $\sim$ takových, že $L$ je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.

- Příklad 3.9.
- Příklad 3.12.
- Příklad 3.10. Jednu odrážku udělejte pořádně, ostatní zrychleně.
- Příklad 3.8. Udělejte jednu odrážku. Pak zkuste totéž pro jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^* \cdot \{d\}^*$ a upozorněte, že přestože index $\sim_L$ je 5, existuje pro $L$ deterministický FA se čtyřmi stavy. Problém je v tom, že tento automat není totální a tudíž není minimální.
- Příklad 3.13.

## 4. cvičení: Minimalizace a kanonizace konečných automatů, nedeterministické automaty, determinizace, odstranění $\varepsilon$-kroků

- Zdůrazněte, že před vlastní minimalizací se z automatu odstraní nedosažitelné stavy a automat se ztotální.
- Příklad 3.2 b).
- Příklad 3.1 a).
- Příklad 3.3.
- Zopakujte nedeterministické FA.
- Příklad 3.4. Počet odrážek podle potřeby, zbytek můžete dodělat na konci hodiny, pokud zbyde čas.
- Zopakovat determinizaci.
- Příklad 3.5 a) nebo b).
- Zopakovat odstranění $\varepsilon$-kroků.
- Příklad 4.5. Příklad řešte pomocí tabulkového zápisu. Máte-li čas, můžete nejdřív ukázat, jak snadno se v tom udělá chyba, když se to dělá přímo na grafu.
- Budete-li mít pocit, že příklad 4.5 nestačil, pokračujte příkladem 4.7.

## 5. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Příklad 5.1.
- Příklad 5.2.
- Příklad 5.3.
- Příklad 5.4.
- Příklad 5.5.
- Příklad 5.6.
- Příklad 5.8.
- Příklad 4.12 a). Zbyde-li čas, řešte i b). Nechcete-li u části b) prezentovat plnohodnotné řešení (je trošku náročnější), můžete řešit zjednodušenou verzi, kde se přijme omezení, že $\cap$ a $\cup$ lze aplikovat jen na jazyky nad stejnou abecedou. Pak se snadno ukáže, že $M_2$ je třída všech konečných jazyků a jejich doplňků. Upozorněte, že bez toho omezení to ale neplatí, uveďte příklad.

## 6. cvičení: Ekvivalence FA, regulárních gramatik a regulárních výrazů

- Příklad 4.8. Stačí 2 odrážky.
- Příklad 4.9.
- Příklad 4.10.
- Příklad 4.11.
- Příklad 4.2.
- Příklad 4.4.
- Alespoň sem byste měli určite dojít. Zkuste zvládnout ještě tyto příklady na bezkontextové jazyky.
- Příklad 6.11 a).
- Příklad 6.1. U druhé gramatiky neztrácejte moc času, příklad slouží jen jako demonstrace popisné síly bezkontextových gramatik.
- Zbyde-li čas, dělejte další odrážky z příkladu 6.11.

## 7. cvičení: Bezkontextové gramatiky, derivační stromy, transformace

- Příklad 6.2.
- Příklad 6.3.
- Příklad 6.5.
- Příklad 6.6. Není třeba formálně dokazovat, že je navržená gramatika jednoznačná. Slovní argumentace postačí.
- Příklad 6.7. Stačí identifikovat problém.
- Příklad 6.8.
- Příklad 6.9.
- Příklad 7.2.
- Zbyde-li čas, dělejte dosud neprocvičené části příkladu 6.11.

## 8. cvičení: CNF, odstranění levé rekurze, pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- Příklad 7.5.
- Příklad 7.6.
- Příklad 7.8.
- Příklad 7.12. Cvičte pouze odstranění levé rekurze (transformaci do GNF v IB102 neučíme). Pokud by jeden příklad nestačil, udělejte ještě příklad 7.13 nebo 7.10.
- Příklad 7.15. Jednu odrážku udělejte pečlivě, v dalších se soustřeďte jen na to podstatné.

## 9. cvičení: Zásobníkové automaty, nedeterministická syntaktická analýza, uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

- Příklad 8.1. Zmiňte prosím, že byl definován pojem *krok výpočtu*, ale pojem *výpočet* pro PDA definován nebyl. Lze si představit hned několik definic, které kromě zjevných požadavků splňují i tyto:
  1. Musí se přečíst celý vstup. V tom případě by v příkladu existoval jen 1 výpočet.
  2. Musí se číst "dokud to lze". V tomto případě existují 4 výpočty.
  3. Stačí přečíst libovolnou část vstupu. V tom případě je výpočtů hodně.
- Příklad 8.3. Udělejte pořádně aspoň dvě odrážky včetně c).
- Příklad 8.6.
- Příklad 9.1.
- Příklad 9.3.
- Zbude-li čas, cvičte další odrážky z příkladu 8.3.

## 10. cvičení: Konstrukce TM, frázové gramatiky, uzávěrové vlastnosti rekursivních a rekursivně spočetných jazyků

- Ukažte, že jazyk $co-\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nad abecedou $\{a,b\}$ je bezkontextový.
- Příklad 10.1.
- Příklad 10.2.
- Příklad 10.4 b). Konstrukci ostatních strojů zformulujte jen neformálně.
- Příklad 11.3 a) d) e) f) g).
- Příklad 11.4. Není nutné vyřešit celý příklad. Co stihnete, to stihnete.

## 11. cvičení: Redukce a rozhodnutelnost problémů.

- Příklad 12.1.
- Příklad 12.2.
- S využitím příkladu 12.3 připomeňte definici Postova korespondenčního problému.
- Příklad 12.4.
- Zbude-li čas, udělejte i příklad 12.5.

## 12. cvičení: Složitost

- Příklad 13.1.
- Příklad 13.3.
- Příklad 13.4.
- Zopakujte pojem *konjunktivní normální forma (cnf-forma)* formulí, pojem *3cnf-forma* a problém *3SAT*. Ke zopakování můžete využít část příkladu 13.5.
- Příklad 13.6 b) c).
- Příklad 13.7.
- Zbude-li čas, udělejte i příklady 13.6 a), 13.2 a 13.8.

# Řešení některých příkladů

# Formální jazyky, regulární gramatiky

**1.1** **a)** $\{xy, y, yx, z\}$ **b)** $\{y\}$ **c)** $\{xyy, xyz, yy, yz, yxy, yxz\}$, $\{yxy, yy, yyx, zxy, zy, zyx\}$
**d)** $\{\varepsilon\}$, $\{y, z\}$, $\{yy, yz, zy, zz\}$, $\{yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz\}$,
$\{\varepsilon, y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \ldots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek $y$ a $z$ včetně $\varepsilon$,
$\{y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \ldots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek $y$ a $z$ kromě $\varepsilon$
**e)** $\{x, y, z\}^* \smallsetminus \{y, z\}$ tj. libovolné slovo složené z písmenek $x$, $y$ a $z$ včetně $\varepsilon$, kromě slov $y$ a $z$

**1.2** **a)** $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\}$ **b)** $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ pokud $\varepsilon \in L$ jinak $\emptyset$ **c)** $\emptyset$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $L$

**1.3** **a)** $\{a, aa, ba, abc, \varepsilon\}$ **b)** $\{a, ba\}$ **c)** $\{aba, aabc, aa, a, aaba, aaabc, aaa, baba, baabc, baa, ba\}$ **d)** ne, protipříklad $baa$ **e)** jedno slovo z množiny $\{a, aa, ba, aba, aaa, baba, baa\}$ **f)** ano, protože $\varepsilon \in L_2$; ne, protipříklad $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$; pro pokročilé: implikace "$\Longrightarrow$" platí, implikace "$\Longleftarrow$" platí pouze v upravené podobě $\varepsilon \in L_2 \Longleftarrow (L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset)$ **g)** ano, ano, ne **h)** všechna slova nad danou abecedou, kromě slov z jazyka $L_2$, formálně: $\{a, b, c, d\}^* \smallsetminus L_2$

**1.4** **a)** Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa, bb\}$, $i = 2$, $L^i = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}$, $\{w^i \mid w \in L\} = \{aaaa, bbbb\}$
**b)** Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa\}$, $L^2 = \{aaaa\}$, ale $|aaaa| \neq 4$ **c)** $L = \{a\}$

**1.5** $L_1 = L_4 = L_5 > L_2, L_1 = L_4 = L_5 > L_3, L_1 = L_4 = L_5 > L_6$, neporovnatelné: $L_2, L_3, L_6$
$L_1$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
$L_2$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, tvaru $xyzxyzxyzxyzxyz\ldots$
$L_3$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna $x$ před všemi $y$ a $z$ a všechna $y$ před všemi $z$
$L_4$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}*$
$L_5$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x, y\}^* \cup \{z\}^*$
$L_6$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt $x$

**1.6** $L_1 = L_5 > L_2 > L_6$, $L_1 = L_5 > L_3 > L_4$, $L_2 > L_4$, neporovnatelné: $L_2$ a $L_3$, $L_6$ a $L_3$, $L_6$ a $L_4$
$L_1$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
$L_2$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, kromě $\varepsilon$
$L_3$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna $x$ před všemi $y$ a $z$ a všechna $y$ před všemi $z$
$L_4$ – ty slova z $L_3$, která mají právě 2 výskyty $y$
$L_5$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}*$
$L_6$ – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt $x$

**1.7** **a)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **b)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*$ **c)** $L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **d)** $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cup L_2 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ a pokud naznáme, že $\varepsilon$ také začíná a končí stejným znakem, je třeba k řešení přidat $\cup (L_1^* \cap L_2^*)$ **e)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **f)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cap L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **g)** $((L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*)^C$

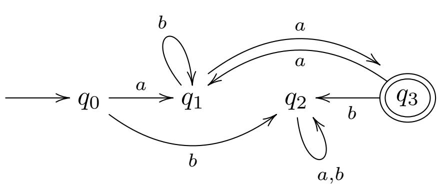
**1.8** **a)** ne, $L - 1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **b)** ano, nutno dokázat obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$ **c)** ne, $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{ab\}$ a $L_3 = \{b, \varepsilon\}$ **d)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **e)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **f)** ano, nutno dokázat obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$ **g)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$

**1.9** **a)** $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, typu 0 **b)** $\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b, c\}^+$, typu 3 (regulární)

**1.10** $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 2j; j, k \in \mathbb{N}_0\}$, dolní indexy u navržených terminálů představují zbytek po dělení počtu 'a' (resp. 'b') dvěma

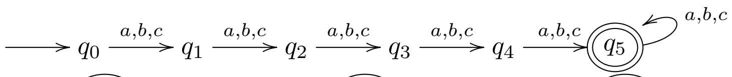
# Deterministické konečné automaty, pumping lemma

**2.1** **a)**

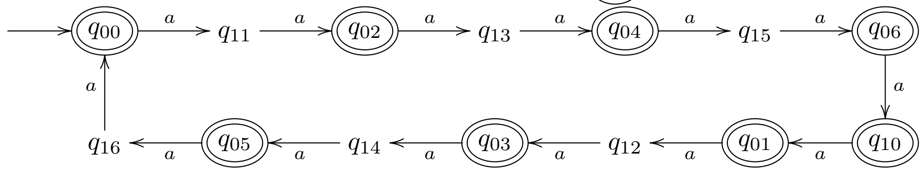



**b)** $L = \{a\} \cdot \{b, aa\}^* \cdot \{a\}$ **c)** $L = (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{aa\})^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cup \{ab\} \cdot \{a, b\}^*) \cup \{b\} \cdot \{a, b\}^*)$

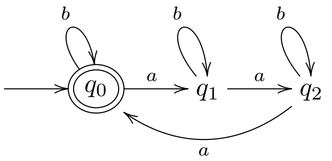
**2.2 a)**



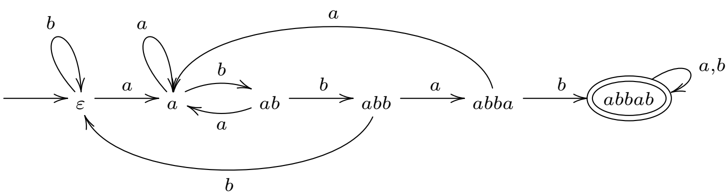

**b)**



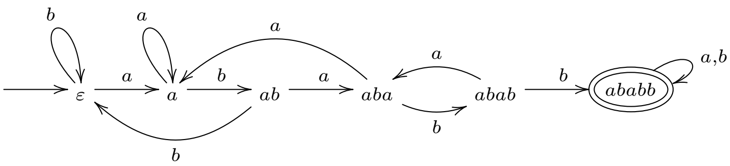

**c)**



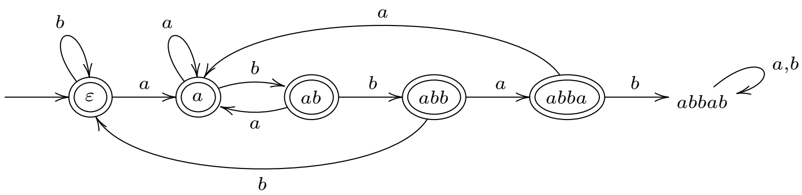

**d)**



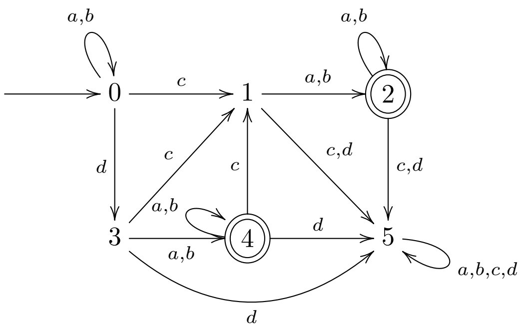

**e)**



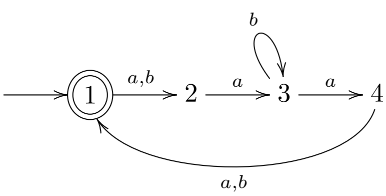

**f)**



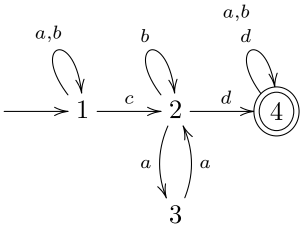

**g)**



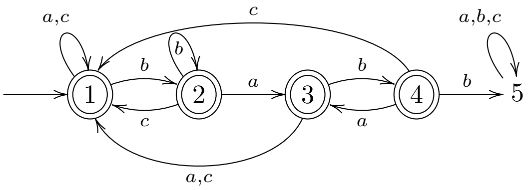

**h)**



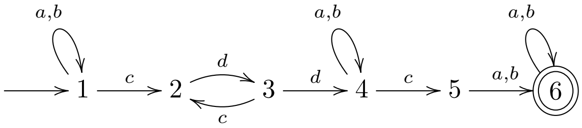

**2.3 a)**



**b)**




**c)**

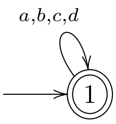



**2.4** $L = \{a\}.\{b\}^*.\{a\}.(\{c\}.\{d\})^* \cup \{b\}$

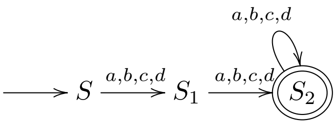
**2.5** $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge w = u.v \Rightarrow |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 3\}$

**2.6** U příkladu **e)** je třeba volit slovo $a^n b^{n!+n}$.

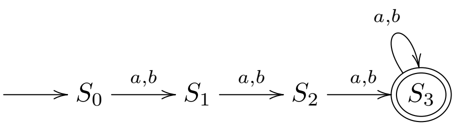
**2.8** **a)** 1.11a



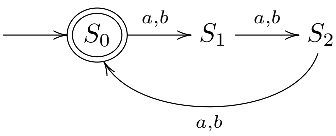

1.11b



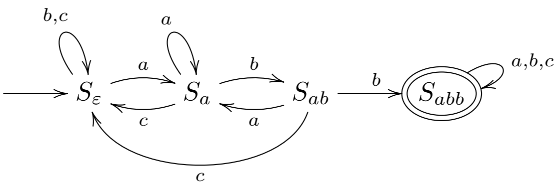

1.11c




1.11d

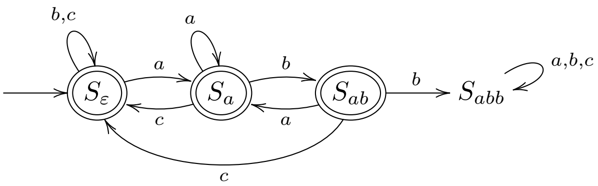



1.11e

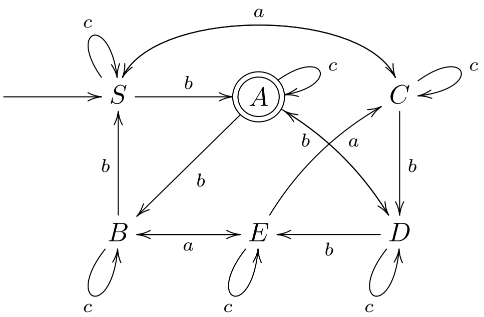


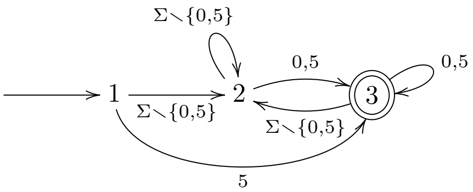

1.11f Není regulární.

1.11h




1.11i



1.11j 


# Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

**3.1 a)**

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| → A | B | C |
| B | D | B |
| C | C | D |
| ← D | C | B |

**b)**

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| ↔ A | B | C |
| B | B | C |
| C | C | D |
| ← D | D | C |

**3.2 a)**

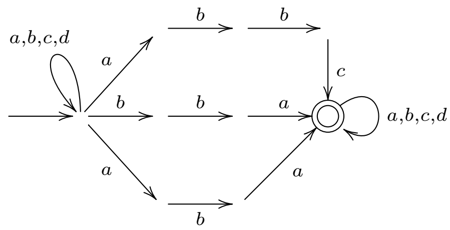
| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| → A | B | C |
| B | C | A |
| C | C | D |
| D | C | E |
| ← E | F | E |
| F | D | F |

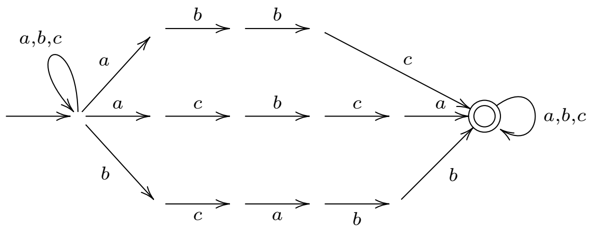
**b)**

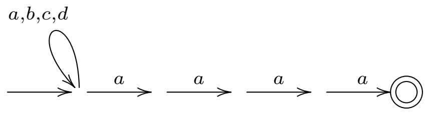
| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| → A | B | C |
| B | D | B |
| ← C | B | C |
| ← D | E | B |
| E | F | C |
| F | F | F |

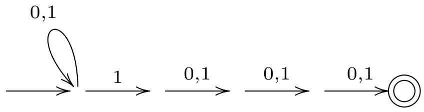
Výsledné automaty v obou případech nejsou ekvivalentní automatům uvedeným v zadání vpravo.

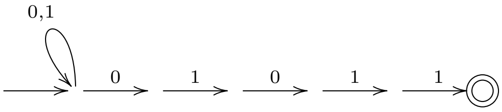
**3.3** Není.

**3.4 a)** 

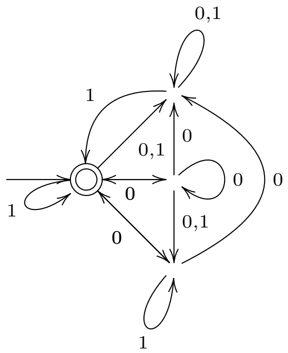

**b)** 


**c)** 

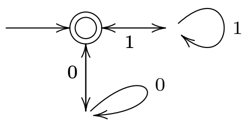

**d)** 


**e)** 

**f)**



**g)**



**3.5 a)**

| | | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | [1] | [23] | [34] | [1] |
| $\leftarrow$ | [23] | [123] | [14] | [234] |
| | [34] | [123] | [1] | [34] |
| $\leftarrow$ | [123] | [123] | [134] | [1234] |
| | [14] | [123] | [134] | [134] |
| $\leftarrow$ | [234] | [123] | [14] | [234] |
| | [134] | [123] | [134] | [134] |
| $\leftarrow$ | [1234] | [123] | [134] | [1234] |

**b)**

| | | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | [1] | [12] | [1] | [1] |
| $\leftarrow$ | [12] | [12] | [13] | [1] |
| | [13] | [12] | [1] | [14] |
| | [14] | [125] | [1] | [1] |
| $\leftarrow$ | [125] | [12] | [136] | [1] |
| | [136] | [127] | [1] | [14] |
| $\leftarrow$ | [127] | [12] | [13] | [1] |

**3.6** $(\{a,b\}.\{b\}.\{b\}^+\{a\}.\{b,ab\}.\{a\})^*\{a,b\}.\{b\}^+$

**3.7**

| | $\{x\}$ | $\{x,y\}$ |
|---|---|---|
| 1 stav | 2 | 2 |
| 2 stavy | 4 | 28 |

**3.8** **a)** Předpokládejme, že takový automat existuje. Pak ze slov $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4$ musejí dvě nutně padnout do stejné třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$. Označme je $a^i, a^j$ $(i \neq j)$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i < j$. Pak platí
$a^i.a^{4-j} = a^{4+i-j} \in L$
$a^j.a^{4-j} = a^4 \notin L$,
a tedy $a^i \not\sim_L a^j \Rightarrow |\sim_L| \geq 5$.
**b)** Analogicky jako v a).

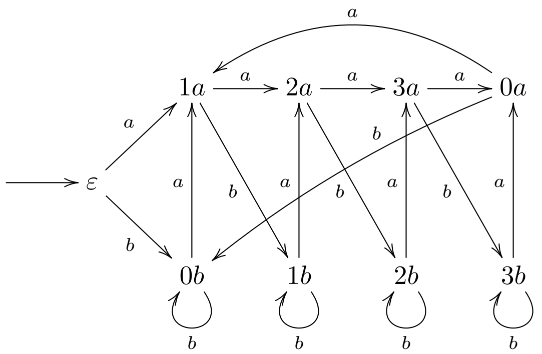
**3.10** **a)** Důkaz sporem. Předpokládejme, že $L$ je regulární. Pak prefixová ekvivalence $\sim_L$ má konečný index, označme jej $n$. Pak ovšem ze slov $a, a^2, a^4, \ldots, a^{2^n}$ nutně musí některá dvě slova padnout do stejné třídy rozkladu, označme je $a^k, a^l$ $(k \neq l)$. Po přiřetězení slova $a^k$ dostáváme slovo $a^k a^k \in L$ a slovo $a^l a^k \notin L$. Tím je dosažen spor s předpokladem a $L$ není regulární.
**b)** $\varepsilon, a, a^2, ..., a^n$ z čehož $a^k, a^l$ (BÚNO $k < l$), která $a^k b^k \in L, a^l b^k \notin L$
**c)** $abb, a^2bb, ..., a^{n+1}bb$ z čehož $a^k bb, a^l bb$ $(k \neq l)$, která $a^k bba^k \in L, a^l bba^k \notin L$
**d)** $\varepsilon, a, a^2, ..., a^n$ z čehož $a^k, a^l$ (BÚNO $k < l$), která $a^k b^k \notin L, a^l b^k \in L$

**3.11** Definujeme binární relaci $\sim$ takto: $u \sim v \Leftrightarrow \#_a(w) \equiv \#_b(w)$ $(mod\ 3)$
$\sim$ je ekvivalence, $\sim$ je pravá kongruence, $|\sim| = 3$, tedy má konečná index, $L = \{w \mid \#_a(w)\ mod\ 3 = 0\}$

**3.12** **a)** 4 **b)** nemá konečný index

**3.13** **a)** $\sim$ je ekvivalence i pravá kongruence, index je 4. $L$ může být libovolný jazyk, jehož minimální automat odpovídá přímo relaci $\sim$. Takových jazyků je 12, což je vidět po nakreslení automatu (bez akceptujících stavů) podle $\sim$ a zvážení, pro které označní koncových stavů je automat minimální. Jazyky $L'$ jsou právě ty, které lze popsat stejným automatem, ale s takovou množinou koncových stavů, při které automat není minimální. Např. $L' = \{a,b\}^*$.
**b)** $\sim$ není ekvivalence (není tranzitivní).

**c)** $\sim$ je ekvivalence i pravá kongruence, index je 9. Lze podle ní sestavit tento automat:




Je vidět, že automat nebude při žádném označení koncových stavů minimální: stavy $\varepsilon, 0a, 0b$ mají stejné přechody a vždy budou alespoň dva z nich označeny jako akceptující nebo neakceptující a tudíž ty dva stavy budou jazykově ekvivalentní. Naopak $L'$ může být jakýkoliv jazyk rozpoznávaný uvedeným automatem s libovolným označením koncových stavů. Takových jazyků $L'$ je tedy celkem $2^9$.

# Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, $\varepsilon$-kroky, Kleeneho věta

**4.1**

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $\leftrightarrow \overline{S}$ | $\{\overline{A}, q_f\}$ | $\{\overline{C}\}$ | $\emptyset$ |
| $\overline{A}$ | $\{\overline{A}\}$ | $\{\overline{B}, q_f\}$ | $\{q_f\}$ |
| $\overline{B}$ | $\{\overline{B}, \overline{C}\}$ | $\{\overline{C}\}$ | $\{\overline{A}, q_f\}$ |
| $\overline{C}$ | $\{\overline{A}, q_f\}$ | $\{\overline{B}, q_f\}$ | $\emptyset$ |
| $\leftarrow q_f$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

**4.2**

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow \overline{S}$ | $\{\overline{X}\}$ | $\{\overline{Y}\}$ | $\{q_f\}$ |
| $\overline{X}$ | $\emptyset$ | $\{\overline{S}, \overline{X}\}$ | $\emptyset$ |
| $\overline{Y}$ | $\emptyset$ | $\{\overline{S}\}$ | $\{\overline{Z}\}$ |
| $\overline{Z}$ | $\{\overline{S}\}$ | $\{q_f\}$ | $\{q_f\}$ |
| $\leftarrow q_f$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

**4.11 a)** $(a+b)^*ab$ **b)** $b^*(ab^*ab^*)^*$ **c)** $a(a+b)^*a + b(a+b)^*b + a + b$ (pokud $\varepsilon$ také začíná a končí na stejným symbolem, přičteme ještě $\varepsilon$) **d)** $((a+b)(a+b))^*$

**4.12 a)** $M_1$ je třída všech konečných jazyků.

**b)** Nechť $\Sigma_1$ je nějaká abeceda. Pak $C(\Sigma_1)$ definujeme jako množinu všech slov, kde se každé písmeno z abecedy vyskytuje aspoň jednou, tj.

$$C(\Sigma') = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall a \in \Sigma_1 : \#_a(w) > 0\}.$$

Pak $M_2$ je třída všech jazyků $L$ takových, že pro všechny $\Sigma_1$, které jsou podmnožinou abecedy jazyka $L$, platí: $L \cap C(\Sigma_1)$ je konečný nebo $C(\Sigma_1) \setminus L$ je konečný.

Poměrně snadno se ukáže, že $M_2$ všechny takové jazyky musí obsahovat a že je tato třída zároveň uzavřená na sjednocení, průnik a komplement.

**c)** $M_3$ je třída všech konečných jazyků.

# Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

**5.1** Neplatí. Jazyky $L_i = \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$ jsou konečné a tudíž regulární, ale $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární.

**5.2** $L_i = \{a,b\}^* \setminus \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \{a,b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n > 0\}$, což není regulární jazyk, protože $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární jazyka a regulární jazyky jsou uzavřené na doplněk.

**5.3** Neregulární jazyky jsou uzavřené na komplement. U všech ostatních operací lze najít jazyky takové, že výsledkem je neregulární jazyk, i takové, že výsledek je regulární. Nechť $R = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ je jazyk nad $\Sigma = \{a,b\}$. $R$ jistě není regulární.

| operace | regulární výsledek | neregulární výsledek |
|---|---|---|
| $L_1 \cap L_2$ | $R \cap co{-}R = \emptyset$ | $R \cap R = R$ |
| $L_1 \cup L_2$ | $R \cup co{-}R = \Sigma^*$ | $R \cup R = R$ |
| $L_1 \setminus L_2$ | $R \setminus R = \emptyset$ | $R \setminus co{-}R = R$ |
| $L_1 \cdot L_2$ | $(R \cup \{\varepsilon\}) \cdot co{-}R = \Sigma^*$ | $R \cdot R$ |
| $L_1^*$ | $(co{-}R)^* = \Sigma^*$ | $R^*$ |

**5.4** Platí.

**5.5** Ani jedna implikace neplatí.

**5.6** Stačí zvolit $L_1$ jako libovolný neregulární jazyk a $L_2$ jako doplněk $L_1$.

# Bezkontextové gramatiky

**6.1** **a)** $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ **b)** Jazyk se nedá moc rozumně popsat.

**6.4** Ano. (Právě všechny reg. jazyky.)

# Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

**7.9** Minimální i maximální délka odvození je $2n - 1$.

# Zásobníkové automaty

**8.2** **a)** $\{a^i b^j \mid i > j > 0\}$

# Uzávěrové vlastnosti CFL

**9.3** **a)** ano **b)** ne **c)** ano **d)** třída bezkontextových jazyků bez vlastnosti sebevložení se rovná třídě regulárních jazyků

# Konstrukce Turingových strojů

**10.2** Návod: TS bude donekonečna číst vstupní pásku a posouvat se vpravo, nebo bude ve dvou krocích opakovaně posunovat hlavu vlevo a vpravo.

# Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

**11.3** **a)** Neplatí. Stačí vzít libovolný neregulární rekurzivně spočetný $L$ na abecedou $\Sigma$ a $R = \Sigma^*$. **b)** Platí (viz. skripta). **c)** Platí (viz. skripta). **d)** Platí. **e)** Platí. **f)** Neplatí. Stačí vzít $R \supseteq L$. **g)** Platí. Plyne z uzavřenosti rekurzivních jazyků na sjednocení.

**11.6** $L = \{w \mid w$ je kód dvojice $(A, v)$ takové, že TS $A$ nezastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$

# Redukce

**12.1** **a)** Platí (přímo z definičního vztahu). **b)** Neplatí. $A = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$, $B = \{0\}$, $f(x) = 0$ pokud $x$ je tvaru $ww$, $f(x) = 1$ jinak. **c)** Platí. **d)** Platí (připomeňme, že $A \leq_m B$ implikuje $co{-}A \leq_m co{-}B$). **e)** Neplatí. $A = \emptyset$, $B$ je problém zastavení. $f(x) = y$, kde $y$ je libovolné slovo nad $\{0, 1, \#\}$, které neleží v $B$. **f)** Platí. $f(w) = \langle M', w \rangle$, kde $M'$ je TM akceptující $A$ takový, že místo do zamítajícího stavu začne cyklit. Tedy $M'$ akceptuje $w$ právě když zastaví. Funkce $f(w) = \langle M, w \rangle$, kde $M$ je libovolný zvolený TM akceptující $A$ naopak redukcí být nemusí (např. pokud je $A$ rekurzivní a $M$ je úplný).

**12.2** $A$ není rekurzivní, protože na něj lze redukovat problém zastavení. $A$ je rekurzivně spočetný (lze ukázat přímo nebo redukcí na problém akceptování). $co{-}A$ není rekurzivně spočetný ($A$ by pak byl rekurzivní).

**12.3** Řešením je posloupnost $2, 2, 4, 3, 3, 1, 1$.

**12.4** Lze ukázat redukcí běžného PCP na problém ze zadání.

**12.5** Lze ukázat redukcí z problému neprázdnosti jazyka popsaného Turingovým strojem.

# Složitost

**13.1** Postupujeme podle definice $\mathcal{O}$. Buď najdeme konstanty $n_0$ a $c$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí definiční nerovnost, nebo ukážeme (většinou sporem), že takové konstanty neexistují. **a)** Volíme například $n_0 = 1$, $c = 3$. Pro všechna $n \geq n_0$ platí $2n \leq 3n = cn$ a proto $2n \in \mathcal{O}(n)$. **b)** Předpokládejme, že existují $n_0$ a $c$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $n^2 \leq cn$. Položme $m = \max\{c, n_0\} + 1$. Zjevně $m \geq n_0$, ale $m^2 > cm$. To je spor a proto $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$. **c)** Platí. **d)** Neplatí. **e)** Nejprve připomeňme definici. Píšeme $f(n) \in 2^{\mathcal{O}(g(n))}$, pokud existují $n_0, c \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $f(n) \leq 2^{c \cdot g(n)}$. Analogicky se definuje i význam dalších aritmetických výrazů obsahujících $\mathcal{O}(g(n))$, jako například $2^{2^{\mathcal{O}(g(n))}}$.

Vztah $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$ samozřejmě platí. Stačí zvolit $n_0 = 1$ a $c = 2$. **f)** Platí. Stačí zvolit $c = 4$ a dopočítat dostatečně velké $n_0$. **g)** Neplatí. V důkazu sporem stačí zvolit $m = \max\{1, c, n_0\}$.

**13.2** Tento vztah obecně neplatí. Protipříkladem jsou například funkce $f(n) = 1$ a

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ n & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zjevně $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$, protože funkce $g$ není shora omezená a tudíž pro každé $n_0, c \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ splňující $g(n) > c \cdot f(n) = c$. Vztah $f(n) \in o(g(n))$ ovšem neplatí, protože funkce $\frac{f(n)}{g(n)}$ nemá pro $n$ jdoucí do nekonečna limitu.

**13.3** Nechť $M_A, M_B$ jsou jednopáskové deterministické Turingovy stroje pracující s časovou složitostí $\mathcal{O}(p_A), \mathcal{O}(p_B)$ (kde $p_A$ a $p_B$ jsou polynomy), které akceptují jazyky $A, B$. Nejprve ukážeme, že třída $\mathsf{P}$ je uzavřená na všechny tři operace.

Popíšeme dvoupáskový deterministický Turingův stroj $M$ akceptující jazyk $A \cup B$. Stroj $M$ pro vstup $x$ nejprve zkopíruje vstup na druhou pásku (v čase $\mathcal{O}(n)$), pak na druhé pásce simuluje výpočet stroje $M_A$. Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje $M_A$, pak i stroj $M$ akceptuje. V opačném případě stroj $M$ simuluje na první pásce výpočet stroje $M_B$. Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje $M_B$, pak i stroj $M$ akceptuje, jinak zamítá. Je zřejmé, že stroj $M$ akceptuje jazyk $A \cup B$ a že pracuje v čase $\mathcal{O}(n + p_A(n) + p_B(n))$, tedy v polyniálním čase.

Stroj akceptující komplement jazyka $A$ získáme ze stroje $M_A$ záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu. Takto získaný stroj pracuje se stejnou časovou složitostí jako $M_A$.

Popíšeme třípáskový Turingův stroj $M$ akceptující jazyk $A.B$. Stroj postupně zkouší rozdělit vstupní slovo $x = x_1x_2 \ldots x_n$ na všechny možné dvojice podslov (nejprve $\varepsilon$ a $x$, pak $x_1$ a $x_2 \ldots x_n$, pak $x_1x_2$ a $x_3 \ldots x_n$, ..., nakonec $x$ a $\varepsilon$). První podslovo vždy zkopíruje na druhou pásku a simuluje na něm výpočet stroje $M_A$. Druhé podslovo zkopíruje na třetí pásku a simuluje na něm výpočet stroje $M_B$. Pokud obě simulace dospějí do akceptujících stavu, stroj $M$ akceptuje. V opačné situaci postup opakujeme pro další dvojici podslov. Pokud už byly vyzkoušeny všechny dvojice, stroj $M$ zamítne. Stroj $M$ pracuje v čase $\mathcal{O}(n \cdot (n + p_A(n) + p_B(n)))$, tedy v polyniálním čase.

Třída $\mathsf{NP}$ je uzavřená na sjednocení i na zřetězení. V obou případech lze použít stejnou argumentaci jako u třídy $\mathsf{P}$. V případě zřetězení lze algoritmus stroje $M$ vylepšit tak, že neprochází všechny dvojice podslov, ale nedeterministicky uhodne správné rozdělení na podslova.

Uzavřenost třídy $\mathsf{NP}$ na komplement je otevřený problém (známý jako $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$?). Výše uvedená argumentace pro $\mathsf{P}$ v tomto případě nefunguje: záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu u nedeterministického stroje získáme stroj, který akceptuje slovo $w$ pokud existuje zamítající výpočet původního stroje nad tímto slovem. Žádoucí by ovšem bylo, aby zkonstruovaný stroj akceptoval slovo $w$ pokud jsou *všechny* výpočty původního stroje nad tímto slovem zamítající.

**13.4** **a)** Neplatí. Stačí uvážit libovolný jazyk $L \in \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. Jelikož třída $\mathsf{P}$ je uzavřená na doplněk, tak i $co{-}L \in \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. Tedy $co{-}L \notin co{-}\mathsf{NP}$, ale přitom $co{-}L \in \mathsf{coNP}$. **b)** Platí. Jelikož $co{-}L_1, co{-}L_2 \in \mathsf{NP}$ a $\mathsf{NP}$ je uzavřené na sjednocení, tak $co{-}L_1 \cup co{-}L_2 \in \mathsf{NP}$. Tedy $L_1 \cap L_2 \in \mathsf{coNP}$. **c)** Platí. Jelikož $co{-}L_2 \in \mathsf{NP}$ a $\mathsf{NP}$ je uzavřené na průnik (lze lehce dokázat), tak $L_1 \cap co{-}L_2 = L_1 \smallsetminus L_2 \in \mathsf{NP}$.

**13.6** Příslušnost do $\mathsf{NP}$ lze dokázat snadno. $\mathsf{NP}$-těžkost lze dokázat redukcí: **a)** z problému *3SAT* (viz Sipser: Theorem 7.35 v 1. vydání, Theorem 7.46 ve 3. vydání) **b)** z problému *3SAT* (viz Sipser: Theorem 7.26 v 1. vydání, Theorem 7.32 ve 3. vydání) **c)** z problému *CLIQUE*. pro danou instanci $\langle G, k\rangle$ problému *CLIQUE* lze v polynomiálním čase vytvořit dvojici $\langle H_k, G\rangle$, kde $H_k$ je úplný graf s $k$ vrcholy. Je zřejmé, že $\langle G, k\rangle \in \mathit{CLIQUE}$ právě tehdy, když $\langle H_k, G\rangle \in \mathit{SGI}$.

Abychom se ujistili, že redukce $\mathit{CLIQUE} \leq_p \mathit{SGI}$ je polynomiální i při binárním zakódování $k$, můžeme ji vylepšit tak, že nejprve ověříme, zda graf $G$ má alespoň $k$ vrcholů. V případě kladné odpovědi pokračujeme jako v předchozím případě (dvojici $\langle H_k, G\rangle$ lze jistě zkonstruovat v čase kvadratickém vzhledem k počtu vrcholů grafu $G$). V opačném připadě jistě platí, že $\langle G, k\rangle \notin \mathit{CLIQUE}$ a tudíž stačí vygenerovat libovolnou dvojici grafů, která nepatří do *SGI* (například $\langle H, G'\rangle$, kde $H$ je graf s jedním vrcholem $v$ a hranou $(v, v)$ a $G'$ je graf s jedním vrcholem, ale bez hrany).

**13.7** **a)** $\mathsf{TIME}(n^2) \subseteq \mathsf{TIME}(n^3)$ (ve skutečnosti lze dokázat i $\mathsf{TIME}(n^2) \subsetneq \mathsf{TIME}(n^3)$) **b)** $\mathsf{SPACE}(2n^2) = \mathsf{SPACE}(100n^2)$ **c)** $\mathsf{SPACE}(n^2) \supseteq \mathsf{TIME}(n^2)$ **d)** $\mathsf{NSPACE}(n^2) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^5)$ (ve skutečnosti lze dokázat i $\mathsf{NSPACE}(n^2) \subsetneq \mathsf{SPACE}(n^5)$) **e)** $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{TIME}(2^n)$, protože $n^k \in \mathcal{O}(2^n)$ pro každé $k$

**13.8** viz Sipser, za Definition 7.7.