MA007 — 4. sada domácích úloh

Příklad 1 [2 body]

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol a f je unární funkční symbol. Dále je dána jeho teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, kde

$$\varphi_1 \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \forall y \left(\bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=i+1}^{5} x_i \neq x_j \quad \wedge \quad \bigvee_{i=1}^{5} y = x_i \right),$$

$$\varphi_2 \equiv \exists x \exists y \forall z (x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge (P(z) \to (z = x \vee z = y))),$$

$$\varphi_3 \equiv \forall x (P(f(x))),$$

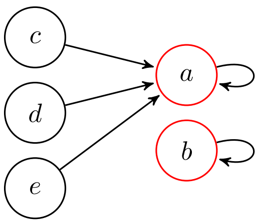
$$\varphi_4 \equiv \forall x (P(x) \to f(x) = x).$$

Zadání. Rozhodněte a dokažte, zda je teorie T bezesporná a zda je úplná.

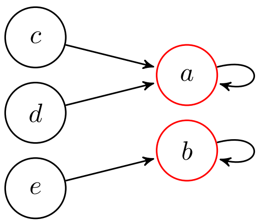
Řešení. Nejprve si rozebereme význam jednotlivých formulí teorie T: Uvažme libovolnou realizaci $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, f_{\mathcal{M}})$ jazyka $\mathcal{L}$. Pro jednodušší vyjadřování a v souladu s níže uvedenými obrázky budeme individua $x \in P_{\mathcal{M}}$ označovat jako *červená*, ostatní pak jako *černá*.

Zřejmě $\mathcal{M} \models \varphi_1$, právě když M je pětiprvková. Podobně $\mathcal{M} \models \varphi_2$, právě když právě dvě individua jsou červená. Dále $\mathcal{M} \models \varphi_3$, právě když je obraz každého individua v $f_{\mathcal{M}}$ červený. A konečně $\mathcal{M} \models \varphi_4$, právě když všechna červená individua jsou pevnými body $f_{\mathcal{M}}$.

Uvažme následující modely $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ teorie T (formálně $M = M' = \{a, b, c, d, e\}$, $P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}'} = \{a, b\}$, $f_{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, b), (c, a), (d, a), (e, a)\}$, $f_{\mathcal{M}'} = \{(a, a), (b, b), (c, a), (d, a), (e, b)\}$):



model $\mathcal{M}$



model $\mathcal{M}'$

Tyto modely zřejmě nejsou izomorfní (a jsou to — až na izomorfizmus — jediné modely naší teorie; to ale k vyřešení zadání vědět nepotřebujeme), a jsou dokonce rozlišitelné v naší predikátové logice: uvažme (uzavřenou) formuli $\varphi \equiv \forall x (P(x) \to \exists y (\neg P(y) \wedge f(y) = x))$ — intuitivně: každé červené individuum má nějaký černý vzor. Zřejmě $\mathcal{M} \not\models \varphi$ a $\mathcal{M}' \models \varphi$, takže $\mathcal{M}' \not\models \neg\varphi$. Z toho dostáváme, že $T \not\models \varphi$ ani $T \not\models \neg\varphi$. Podle věty o korektnosti tak $T \nvdash \varphi$ ani $T \nvdash \neg\varphi$.

Teorie T je tedy bezesporná (našli jsme formuli, která v T není dokazatelná), ale není úplná (našli jsme uzavřenou formuli takovou, že v T není dokazatelná ani ona, ani její negace).

Příklad 2 [5 bodů]

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je binární predikátový symbol. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ uvažme formule

$$\varphi_n \equiv \forall y \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} (x_i \neq x_j \wedge P(y, x_i)) \right),$$

$$\psi_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} (x_i \neq x_j \wedge P(x_i, x_j)) \right).$$

Nyní ještě zadefinujme formuli $\theta \equiv \forall x \forall y (P(x, x) \wedge (P(x, y) \to P(y, x)))$ a teorie $R = \{\theta\} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $S = \{\theta\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Uvažme libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ s nosičem M a binární relací $P_{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$

pro symbol P. Řekneme, že podsoubor $S \subseteq M$ je *povolený*, právě když pro každá jeho dvě individua $x, y \in S$ platí $(x, y) \in P_{\mathcal{M}}$.

Zadání.

a) [**1 bod**] Rozhodněte a dokažte, zda každý model teorie R obsahuje nekonečný povolený podsoubor individuí.

b) [**1 bod**] Rozhodněte a dokažte, zda každý model teorie S obsahuje nekonečný povolený podsoubor individuí.

c) [**2 body**] Zadejte nějakou teorii T jazyka $\mathcal{L}' = \{P, f\}$ s rovností, kde P je binární predikátový symbol a f unární funkční symbol, takovou, že pro každý soubor individuí M a každou binární relaci $P_{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$ platí: M obsahuje nekonečný povolený podsoubor individuí, právě když existuje zobrazení $f_{\mathcal{M}}\colon M \to M$ takové, že realizace $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, f_{\mathcal{M}})$ jazyka $\mathcal{L}'$ je modelem teorie T.

Pokud nejste schopni podúlohu **c)** vyřešit, můžete místo ní vyřešit jednodušší verzi (pak ale z této podúlohy získáte nejvýš 1 bod): Zadejte nějakou teorii T jazyka $\mathcal{L}'' = \{P, Q\}$ s rovností, kde P je binární predikátový symbol a Q unární predikátový symbol, takovou, že pro každý soubor individuí M a každou binární relaci $P_{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$ platí: M obsahuje nekonečný povolený podsoubor individuí, právě když existuje podsoubor $Q_{\mathcal{M}} \subseteq M$ takový, že realizace $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, Q_{\mathcal{M}})$ jazyka $\mathcal{L}''$ je modelem teorie T.

d) [**1 bod**] Uvažme ještě pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ formuli

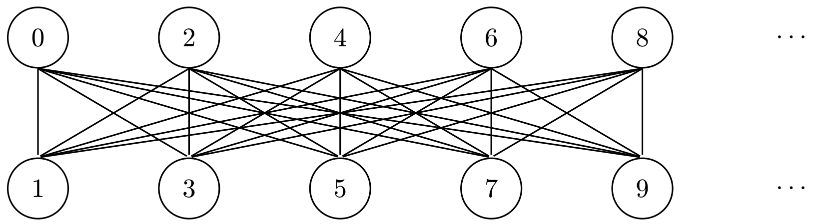
$$\xi_n \;\equiv\; \forall y \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} (x_i \neq x_j \wedge P(y, x_i) \wedge P(x_i, x_j)) \right)$$

a zadefinujme teorii $U = \{\theta\} \cup \{\xi_n | n \in \mathbb{N}\}$. Rozhodněte a dokažte, zda každý model teorie U obsahuje nekonečný povolený podsoubor individuí.

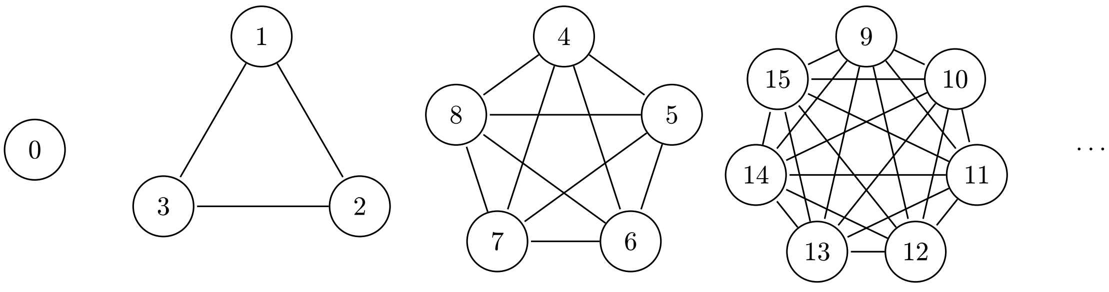
Poznámky. Symbol $\equiv$ za formulí značí (meta)rovnítko. $a \neq b$ je syntaktická zkratka pro $\neg(a = b)$. Slovo *soubor* je zde používáno jako synonymum pro (meta)množinu.

Řešení. Opět si nejprve zkusíme udělat o úloze názornou představu. Realizaci $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}})$ jazyka $\mathcal{L}$ si můžeme představit jako graf na M, kde individua x, y jsou spojená hranou, právě když $(x, y) \in P_{\mathcal{M}}$. Zřejmě $\mathcal{M} \models \theta$, právě když $P_{\mathcal{M}}$ je reflexivní a symetrická; náš graf tedy můžeme považovat za neorientovaný (smyčky ovšem do něj pro jednoduchost zařazovat nebudeme). Povolený podsoubor individuí pak odpovídá klice v grafu.

a) Platí $\mathcal{M} \models \varphi_n$, právě když stupeň každého vrcholu je aspoň n. Dohromady tedy $\mathcal{M} \models R$, právě když stupeň každého vrcholu je nekonečný; to však nekonečnou kliku nevynucuje, jak můžeme vidět na modelu s nosičem $\mathbb{N}$ a $P_{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b \text{ nebo } 2 \nmid a + b\}$. Odpovídající graf je zřejmě bipartitní, a tak neobsahuje ani kliku o velikosti 3.



b) Platí $\mathcal{M} \models \psi_n$, právě když graf obsahuje kliku o velikosti n. Dohromady tedy $\mathcal{M} \models S$, právě když graf obsahuje kliku libovolné (konečné) velikosti; to však opět nekonečnou kliku nevynucuje, jak můžeme vidět na modelu s nosičem $\mathbb{N}$ a $P_{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \lfloor\sqrt{a}\rfloor = \lfloor\sqrt{b}\rfloor\}$. Každý vrchol má totiž zřejmě jen konečný stupeň.



c) Nejprve se podívejme na zjednodušenou variantu úlohy. Uvažme formuli

$$\eta \;\equiv\; \forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \to P(x, y))$$

a dále pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ definujme formuli

$$\zeta_n \;\equiv\; \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} (x_i \neq x_j \wedge Q(x_i)) \right).$$

Teď můžeme uvážit teorii $T = \{\eta\} \cup \{\zeta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Vezměme nejprve libovolný model $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, Q_{\mathcal{M}})$ teorie T. Formule ζ_n vynucují, že predikát Q platí pro nekonečně mnoho individuí. Formule η pak vynucuje, že individua, pro něž je Q pravdivý, tvoří v odpovídajícím grafu kliku.

Nyní naopak předpokládejme, že na souboru individuí M máme binární relaci $P_{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$ takovou, že odpovídající graf obsahuje nekonečnou kliku. Pak můžeme do $Q_{\mathcal{M}}$ zařadit právě individua (nějaké) takové kliky a realizace $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, Q_{\mathcal{M}})$ pak jistě bude modelem teorie T.

A nyní k původní variantě: Jednou z možností je „vytvořit si“ z funkčního symbolu predikátový a vyřešit úlohu stejně jako výše (např. místo $Q(x)$ bychom psali $f(x) = x$). Není těžké si rozmyslet, že na aspoň dvouprvkovém nosiči máme naprostou volnost v tom, která individua budou tuto rovnost splňovat.

Funkční symbol nám ale dává možnost zadat dokonce *konečnou* teorii s požadovanou vlastností: Definujme formule

$$\rho \;\equiv\; \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y),$$
$$\sigma \;\equiv\; \exists x \forall y(f(y) \neq x),$$
$$\tau \;\equiv\; \forall x \forall y((f(x) \neq x \wedge f(y) \neq y) \to P(x, y)).$$

Nyní položíme $T = \{\rho, \sigma, \tau\}$.

Vezměme nejprve libovolný model $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, f_{\mathcal{M}})$ teorie T. Formule σ vynucuje, že $f_{\mathcal{M}}$ není surjektivní, tj. že existuje individuum x, které nemá v $f_{\mathcal{M}}$ žádný vzor. Formule ρ pak vynucuje, že $f_{\mathcal{M}}$ je injektivní. Individua $x, f_{\mathcal{M}}(x), f_{\mathcal{M}}(f_{\mathcal{M}}(x)), \ldots$ jsou tedy po dvou různá, takže žádné z nich není pevným bodem $f_{\mathcal{M}}$, a tak podle τ každá dvojice z nich náleží do $P_{\mathcal{M}}$. Tvoří tedy nekonečnou kliku.

Nyní naopak předpokládejme, že na souboru individuí M máme binární relaci $P_{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$ takovou, že odpovídající graf obsahuje nekonečnou kliku. To tedy[1] znamená, že existuje injektivní posloupnost $g\colon \mathbb{N} \to M$ taková, že $(g(i), g(j)) \in P_{\mathcal{M}}$ pro libovolná $i, j \in \mathbb{N}$. Definujeme zobrazení $f_{\mathcal{M}}\colon M \to M$ následovně:

- $f_{\mathcal{M}}(g(i)) = g(i + 1)$ pro každé $i \in \mathbb{N}$;
- $f_{\mathcal{M}}(a) = a$ pro všechna individua a, která v g nejsou obrazem žádného přirozeného čísla.

Je nasnadě, že realizace $\mathcal{M} = (M, P_{\mathcal{M}}, f_{\mathcal{M}})$ je skutečně modelem teorie T.

d) Nyní $\mathcal{M} \models \xi_n$, právě když každý vrchol grafu je obsažen v klice o velikosti n. Dohromady tedy $\mathcal{M} \models U$, právě když každý vrchol grafu je obsažen v klice libovolné (konečné) velikosti; ani takto silná vlastnost ale stále nevynucuje nekonečnou kliku. Jako protipříklad nyní můžeme zvolit „sjednocení“ modelů z podpříkladů **a)**, **b)**, tj. nosičem je stále $\mathbb{N}$ a položíme $P_{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lfloor \sqrt{b} \rfloor \text{ nebo } 2 \nmid a + b\}$.

Pro každé individuum (číslo) pak najdeme libovolně mnoho čísel opačné parity, s nimiž tvoří kliku. Každé číslo je ovšem spojeno hranou jen s konečně mnoha čísly stejné parity, takže každá klika může od obou parit obsahovat jen konečně mnoho čísel, a tak žádná nekonečná klika neexistuje.

[1] Pro znalce teorie množin: zde se ve skutečnosti odvoláváme na (velmi slabou formu) axiomu výběru.