Příklad 1 [2 body + 1 bonusový bod]

Řešení Nejprve si uvědomme, že každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ je možné neformálně vnímat jako (potenciálně nekonečný) graf s množinou vrcholů M a množinou hran $R_{\mathcal{M}}$ Intuitivně, formule φ_1 říká, že v tomto grafu existuje právě jeden vrchol do kterého nevede žádná hrana. Formule φ_2 říká, že do každého vrcholu vede nejvýše jedna hrana. Formule φ_3 vynucuje, že žádný vrchol nemá přesně jednoho následníka a formule φ_4 říká, že každý vrchol má nejvýše dva následníky. Konjunkci těchto formulí splňuje zejména každý binární strom, pokud tedy chceme realizaci s alespoň 6 prvky, lze uvážit realizaci $\mathcal{M}$ s nosičem $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, v níž $R_{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7)\}$.

Pro bonusové zadání stačí uvážit realizaci $\mathcal{M}$ s nosičem $M = \mathbb{N}_0$, v níž platí $R_{\mathcal{M}} = \{(n, n + 1), (n, n + 2) \mid n \in \mathbb{N} \text{ je sudé číslo}\}$.

Příklad 2 [3 body + 1 bonusový bod]

Řešení Existuje vícero správných řešení. Hodí se zavést syntaktickou zkratku $\mathit{empty}(z) \equiv \forall t\, t \odot z = z$, která vynutí, že v libovolné realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models \mathit{empty}(z)[e]$ právě když $e(z) = \emptyset$. Pak lze položit $\varphi = \exists z(\mathit{empty}(z) \wedge (x \odot y = z) \wedge \forall u(u \odot y = z \rightarrow u \odot x = u))$. Tato formule říká, že $e(x)$ je největší (vzhledem k inkluzi) podmnožina $\mathbb{N}$ disjunktní s $e(y)$, což je právě $\mathbb{N} \setminus e(y)$.

Formuli ψ lze buď zapsat pomocí formule φ a De Morganových zákonů, nebo si lze uvědomit, že sjednocení dvou množin je nejmenší množinou (vzhledem k inkluzi), která obsahuje tyto dvě množiny jako své podmnožiny. Takovouto vlastnost je možné zapsat formulí $\psi \equiv b \odot a = b \wedge c \odot a = c \wedge \forall u((u \odot b = b \wedge u \odot c = c) \rightarrow u \odot a = a)$.