MA007 – zadání páté sady

Příklad 1 [2 body]

Zadání Uvažme jazyk $\mathcal{L} = \{R\}$ s rovností, kde R je binární predikátový symbol. Dále uvažme následující teorii T s jazykem $\mathcal{L}$:

$$T \quad = \quad \{\forall x \forall y\, (R(x, y) \to \forall z(R(x, z) \to z = y))\}.$$

Nyní uvažme jazyk $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol, a teorii T' s tímto jazykem zadanou následovně:

$$T' \quad = \quad \{\forall x \forall y\, (R(x, y) \to f(y) = x), \forall x \forall y\, (x \neq y \to f(x) \neq f(y))\}.$$

Rozhodněte a dokažte, zda:

a) T' je rozšířením teorie T,

b) T' je konzervativním rozšířením teorie T.

Řešení Teorie T' je rozšíření teorie T, které ovšem není konzervativní.

Nejprve ukážeme, že T' je rozšířením teorie T. Zřejmě jazyk teorie T' obsahuje jazyk teorie T, stačí tedy ukázat, že $T' \vdash \forall x \forall y\, (R(x, y) \to \forall z(R(x, z) \to z = y))$. Označme tuto formuli (jediný axiom teorie T) jako φ. Dle věty o úplnosti stačí ukázat, že $T' \models \varphi$.

Sporem předpokládejme, že existuje model $\mathcal{M}$ teorie T' takový, že $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Z Tarského definice pravdivosti plyne, že musí existovat trojice individuí a, b, c v nosiči $\mathcal{M}$ takových, že $(a, b) \in R_{\mathcal{M}}$, $(a, c) \in R_{\mathcal{M}}$ a $b \neq c$. Protože $\mathcal{M} \models T'$, musí platit $f_{\mathcal{M}}(b) = a$ a $f_{\mathcal{M}}(c) = a$ (vynucuje to první axiom teorie T'). To ovšem není možné, neboť v každém modelu teorie T' se f realizuje jako injektivní funkce (vynucuje to druhý axiom teorie T'), spor.

Nyní ukážeme, že T' *není* konzervativním rozšířením teorie T. Dle definice musíme najít formuli ψ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že $T \nvdash \psi$ a $T' \vdash \psi$. Uvažme formuli $\psi = \forall x \forall y \forall z\, ((R(x, z) \land R(y, z)) \to x = y)$. Neformálně řečeno, formule ψ říká, že R se má realizovat jako relace, jejíž inverze je parciální funkce. Dle vět o korektnosti, resp. o úplnosti, stačí ukázat, že $T \not\models \psi$, resp. $T' \models \psi$.

Nejprve ukážeme, že $T \not\models \psi$. Uvažme realizaci $\mathcal{M}_1$ jazyka $\mathcal{L}$ danou následovně:

- jejím nosičem je soubor $M = \{0, 1\}$,
- $R_{\mathcal{M}_1} = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Pak zřejmě $\mathcal{M}_1 \models T$ (neformálně řečeno, φ říká, že R se musí realizovat jakožto parciální funkce) avšak $\mathcal{M}_1 \not\models \psi$ (neboť $R^{-1}_{\mathcal{M}_1} = \{(0, 0), (0, 1)\}$ není parciální funkce). Tedy $T \not\models \psi$.

Nyní ukážeme, že $T' \models \psi$. Sporem předpokládejme, že existuje model $\mathcal{M}_2$ teorie T' takový,[1] že $\mathcal{M}_2 \not\models \psi$. Z Tarského definice pravdivosti plyne, že existují prvky a, b, c v nosiči realizace $\mathcal{M}_2$ takové, že $(a, c) \in R_{\mathcal{M}_2}$, $(b, c) \in R_{\mathcal{M}_2}$ a zároveň $a \neq b$. Pak ale musí platit $f_{\mathcal{M}_2}(c) = a$ a ${}_{\mathcal{M}_2}(c) = b$ (vynucuje to první axiom teorie T'), což není možné, neboť $f_{\mathcal{M}_2}$ je funkce, spor. Tím je důkaz hotov.

[1] Tj. $\mathcal{M}_2$ je realizace jazyka $\mathcal{L}'$

Příklad 2 [3 body]

Zadání Uvažme jazyk $\mathcal{L} = \{P^1, P^2, P^3, \dots\}$ s rovností, kde pro libovolné $i \geq 1$ je P^i unární predikátový symbol. (Zejména tedy jazyk $\mathcal{L}$ obsahuje nekonečně mnoho predikátových symbolů.)

a) Zadejte *splnitelnou* teorii T s jazykem $\mathcal{L}$ takovou, že pro každý model $\mathcal{M}$ teorie T platí

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}} \text{ je nekonečný soubor individuí.}$$

b) Dokažte, že neexistuje žádná teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathcal{M} \models T \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}} \text{ je nekonečný soubor individuí.}$$

Řešení a) Uvažme například teorii

$$T = \{\varphi_n, \psi_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

kde pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\varphi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$$
$$\psi_n = \forall x\, P^n(x).$$

Neformálně řečeno, formule φ_n vynucuje alespoň n-prvkový nosič a formule ψ_n vynucuje, aby se predikátový symbol P^n realizoval jako soubor všech prvků v nosiči. Pak každý model $\mathcal{M}$ teorie T má nekonečný nosič a všechny unární predikátové symboly jazyka $\mathcal{L}$ se v tomto modelu realizují jako soubory rovné tomuto nekonečnému nosiči. V takové realizaci je průnik $\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}}$ opět roven celému nosiči, obsahuje tedy nekonečně mnoho individuí.

b) Mějme libovolnou teorii T takovou, že každá realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, v níž je $\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}}$ nekonečným souborem individuí, je modelem teorie T. Ukážeme, že pak níže uvedená realizace $\mathcal{M}'$ jazyka $\mathcal{L}$, v níž je $\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}'}$ prázdným souborem, je rovněž modelem teorie T. Tím bude vyloučena existence teorie T uvedené v zadání.

Realizace $\mathcal{M}'$ je dána následovně:

- jejím nosičem je soubor všech přirozených čísel $\mathbb{N}$,
- pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $P^n_{\mathcal{M}'} = \{n, n+1, \dots\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$.

Zřejmě vskutku $\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}'}$ je prázdný soubor individuí.

Nechť $\varphi \in T$ je libovolná formule. Protože φ je konečné slovo, vyskytuje se v ní pouze konečně mnoho predikátových symbolů jazyka $\mathcal{L}$. Existuje tedy $k \in \mathbb{N}$ takové, že ve φ se nevyskytuje symbol P^n pro žádné $n \geq k$. Dále realizace symbolů, které se ve formuli nevyskytují, zřejmě nemají žádný vliv na to, zda je formule v dané realizaci jazyka $\mathcal{L}$ pravdivá, či nikoliv. Máme tedy následující:

Tvrzení Nechť $\mathcal{M}''$ je libovolná realizace jazyka $\mathcal{L}$ taková, že $M' = M''$ a $P^n_{\mathcal{M}'} = P^n_{\mathcal{M}''}$ pro všechna $n < k$. Pak $\mathcal{M}' \models \varphi$ právě když $\mathcal{M}'' \models \varphi$.

Uvažme nyní realizaci $\mathcal{M}''$ jazyka $\mathcal{L}$ s nosičem $\mathbb{N}$ takovou, že

- $P^n_{\mathcal{M}''} = \{n, n+1, \dots\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$, jestliže $n < k$;
- $P^n_{\mathcal{M}''} = \{k, k+1, \dots\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq k\}$, jestliže $n \geq k$.

Pak platí $\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i_{\mathcal{M}''} = \{k, k+1, \dots\}$, což je nekonečný soubor a tedy dle předpokladu $\mathcal{M}'' \models \varphi$. Ovšem v $\mathcal{M}''$ se všechny predikátové symboly s indexem $< k$ realizují stejným způsobem, jako v $\mathcal{M}'$. Z výše uvedeného tvrzení tedy dostáváme $\mathcal{M}' \models \varphi$. Protože $\varphi \in T$ byla zvolena libovolně, dostáváme $\mathcal{M}' \models T$, což jsme chtěli ukázat.