10 Dekompozice grafů, algoritmy a minory

Další autorův výběr tématu nás zavede ke *strukturální teorii* grafů – k různým jejich dekompozicím, grafovým minorům a navazujícím efektivním algoritmům pro jinak těžké problémy.

Obecnou inspirací nám je známý fakt, že většinu jinak těžkých problémů lze řešit snadno a efektivně na stromech. Podobná situace nastává třeba u intervalových grafů nebo obecně u chordálních grafů. Proto se podíváme na grafy, které jsou svým způsobem „stromům blízké“, ve smyslu existence jejich *vhodné dekompozice*.

Vrcholem této lekce je formulace hlavního výsledku takzvané „Graph Minors Theory“ od Robertsona a Seymoura, který lze bez nadsázky prohlásit za asi největší výsledek, kterého dosud teorie grafů dosáhla (i v porovnání s Větou o čtyřech barvách). □

Stručný přehled lekce

- Úvodní zamyšlení nad řešením obtížných problémů.
- Stromová šířka grafu z mnoha stran. Některé jiné „šířkové“ param.
- Ukázky použití dekompozic grafů na efektivní algoritmy.
- Něco o grafových minorech a strukturální teorii.

10.1 Obtížné problémy na speciálních grafech

V Lekci 7 jsme uvedli některé „neřešitelně obtížné“, přesněji $\mathcal{NP}$-těžké grafové problémy, například 3-obarvení grafu nebo nezávislá množina vrcholů. □

Oba tyto problémy snadno vyřešíme na intervalových grafech.

Algoritmus 10.1. Nalezení nezávislé množiny v intervalovém grafu
Předpokládejme, že graf G je daný svou intervalovou reprezentací (v případě potřeby je možno tuto reprezentaci efektivně sestrojit). Maximální nezávislou množinu nalezneme následovně.

- Uspořádáme intervaly reprezentující G podle jejich pravých konců. □
- Do nezávislé množiny hladově (v tomto uspořádání) vložíme vždy první interval neprotínající se s předchozími vybranými.

Také na obecnějších chordálních grafech můžeme navrhovat rychlé a povětšinou i snadné algoritmy.

Algoritmus 10.2. Určení barevnosti chordálního grafu

- Snadno zkonstruhujeme simpliciální dekompozici našeho grafu G (Věta 9.6). □
- Graf G je k-degenerovaný, kde $k = \omega(G) - 1$ je největší stupeň simpliciálního vrcholu v některém kroku simpliciální dekompozice G. Hladově tudíž můžeme G obarvit $k+1$ barvami a to je optimální (neboť máme v G kliku velikosti $k+1$). □

Algoritmus 10.3. Nalezení nezávislé množiny chordálního grafu

- Opět zkonstruhujeme simpliciální dekompozici našeho grafu G (Věta 9.6).
- V pořadí této dekompozice hladově přidáváme vrcholy do nezávislé množiny. (Tento postup je přímým zobecněním Algoritmu 10.1, viz také Věta 9.8.) □

Možná zobecnění?

Zajímavou a užitečnou otázkou teď je, jak takové postupy zobecnit na širší třídy grafů, které mají nějakou specifickou omezující (ale ne příliš) vlastnost – „parametr“.

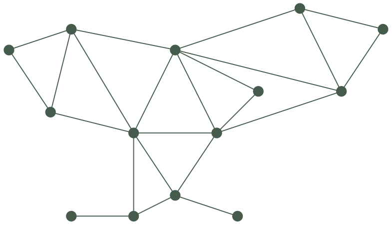
10.2 Tree-width – čtyři definice

Název „tree-width“ byl zaveden Robersonem a Seymourem počátkem 80-tých let, ale pak se ukázalo, že ekvivalentní definice již uvažovali matematici léta před nimi, například v souvislosti s takzvanými „k-trees“ nebo se simpliciálními dekompozicemi. (Důsledkem tohoto vývoje je také bohatost různých definic stejného pojmu. . .) □

Připomeňme, že velikost největší kliky v grafu G se označuje $\omega(G)$.

Definice: *Stromovou šířkou (tree-width)* grafu G nazveme nejmenší přirozené k takové, že existuje chordální graf H s $\omega(H) = k + 1$ obsahující G jako podgraf ($H \supseteq G$).

Například každý podgraf následujícího chrodálního grafu má tree-width ≤ 2:



□

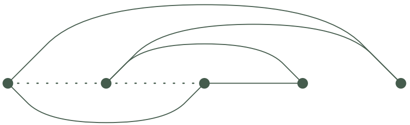
Kde je však v této definici nějaký „strom“? Je, ale skrytý – podívejte se na Větu 9.8 popisující chordální grafy jako průnikové grafy podstromů ve stromě.

Jinou možnost popisu ukazuje:

Definice: Vrcholy $V(G)$ grafu G uspořádáme do posloupnosti (permutace) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ definujme $\ell(v_i)$ jako počet všech indexů $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ takových, že vrcholy v_i a v_j jsou v G spojeny cestou používající pouze vrcholy z množiny $\{v_j, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$. □

Druhou *stromovou šířkou* grafu G nazveme nejmenší hodnotu výrazu $\max_v \ell(v)$ přes všechny permutace vrcholů $V(G)$.

Všimněte si, že uspořádání vrcholů z této definice je vlastně zpětnou simpliciální dekompozicí chordálního grafu $H \supseteq G$ z předchozí definice (viz také Věta 9.6).



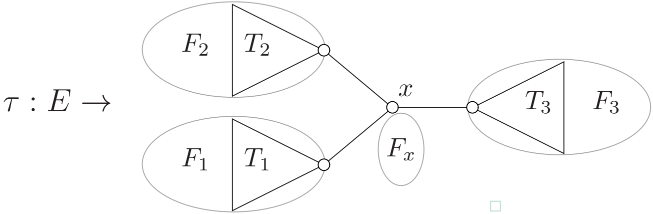
V nakresleném příkladě grafu C_5 vidíme uspořádání vrcholů se šířkou 2. (Tečkované hrany ukazují tzv. *chordální doplnění* grafu, relevantní k první definici tree-width.)

Ještě další, značně odlišný, přístup má tato definice:

Definice: Pro libovolný strom T uvažujeme (libovolné) zobrazení $\tau : E(G) \to V(T)$. Pro vrchol $t \in V(T)$ označíme $T_1, \ldots, T_d$ jednotlivé komponenty lesa $T - t$ a $F_i = \tau^{-1}\big(V(T_i)\big)$. Označme

$$\ell_\tau(t) = |V(G)| + (d-1) \cdot c(G) - \sum_{i=1}^{d} c(G - F_i),$$

kde $c(H)$ značí počet souvislých komponent grafu H.



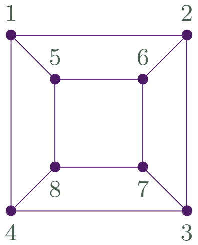
Třetí *stromovou šířkou* grafu G pak definujeme jako nejmenší možnou, přes všechny dvojice T, τ, hodnotu výrazu $\max_{t \in V(T)} \ell_\tau(t)$.

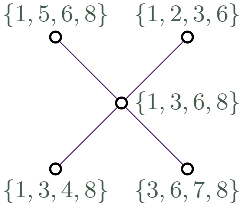
Nakonec si uvedeme ještě původní definici Robertsona a Seymoura, která se většinou uvádí jako ta první a hlavní (a na ostatní možné definice málokdy přijde řeč).

Definice 10.4. Stromová dekompozice grafu G.
Stromovou dekompozicí grafu G nazveme strom T spolu se systémem množin $\mathcal{X}_t$ (zvaných „balíky“) pro $t \in V(T)$, kde

- $\mathcal{X}_t \subseteq V(G)$ a $\bigcup_{t \in V(T)} \mathcal{X}_t = V(G)$, □
- pro každou hranu $e = uv \in E(G)$ je $u, v \in \mathcal{X}_t$ pro nějaké $t \in V(T)$, □
- (*interpolační* vlastnost) pro každý vrchol $v \in V(G)$ tvoří podmnožina všech $t \in V(T)$ s $v \in \mathcal{X}_t$ podstrom v T. □

Šířkou dekompozice $T, \mathcal{X}$ rozumíme největší hodnotu $|\mathcal{X}_t| - 1$ pro $t \in V(T)$ a čtvrtou *stromovou šířkou* grafu G nazveme nejmenší možnou šířku stromové dekompozice G.





Přes veškerou zdánlivou odlišnost uvedených definic platí následovné.

Věta 10.5. *Všechny čtyři výše uvedené definice stromové šířky definují přesně tutéž hodnotu, pokud graf G má neprázdnou množinu hran.*

Důkaz plného znění této věty je však nad rámec našeho textu.

O četnících a zloději

Na závěr si představme *hru na četníky a zloděje* s těmito pravidly: Zloděj se bleskovou rychlostí pohybuje po hranách grafu přes vrcholy neobsazené četníky (jeho pohyb vždy skončí ve vrcholu, ne „uprostřed“ hrany). Naopak četníci se grafem vůbec nepohybují, jen přilétají do a odlétají z vrcholů helikoptérou. Zloděj je chycen ve svém vrcholu z přiletivším četníkem, pokud jsou i všichni sousedé z zrovna obsazeni četníky.

Věta 10.6. *Nejmenší počet četníků potřebných k zaručenému chycení zloděje v grafu G je roven stromové šířce G plus 1.*

10.3 Některé další parametry

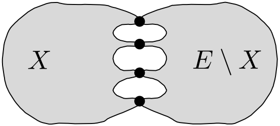
Definice: *Cestní* dekompozici a šířku (path-width) grafu G definujeme stejně jako v Definici 10.4, jen požadujeme navíc, aby T byla cesta. □

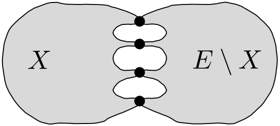
Definice: Vrcholy $V(G)$ grafu G uspořádáme do posloupnosti (permutace) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *Bandwidth* grafu G definujeme jako nejmenší hodnotu výrazu $\max_{v_i v_j \in E(G)} |i - j|$ přes všechny permutace vrcholů $V(G)$. □

Větvené dekompozice

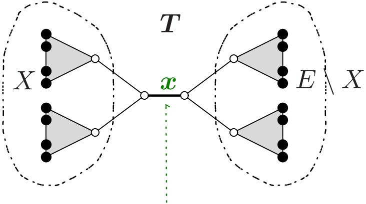
Graf je *kubický*, pokud má všechny vrcholy stupně 3. Strom je *podkubický*, pokud má všechny vrcholy stupně ≤ 3.

Definice: Pro libovolný graf G a podmnožinu $X \subseteq E(G)$ definujeme *funkci souvislosti* $\lambda_G(X)$ jako počet vrcholů G, které jsou konci některých hran z X i hran z $E(G) \setminus X$ (*separace* množiny X).



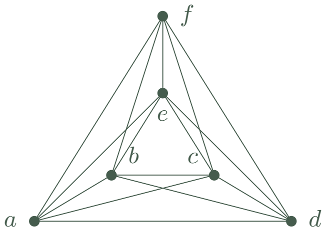


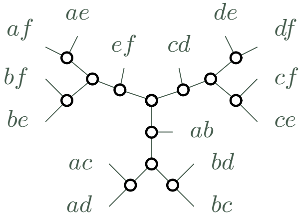
Definice 10.7. **Větvená dekompozice** grafu G
Nechť T je podkubický strom a $\tau : E(G) \to L(T)$ je bijekce hran grafu G do listů $L(T)$ stromu T. Pro každou hranu x stromu T definujeme šířku x jako $\lambda_G(X)$, kde $X = \tau^{-1}\big(V(T_1)\big)$ pro jednu z komponent T_1, T_2 lesa $T - x$.



šířka$(x) \; := \; \lambda_G(X) = \lambda_G(E \setminus X)$ □

Pak šířkou dekompozice T, τ je maximální šířka ze všech hran T a *větvenou šířkou* grafu G je nejmenší možná šířka větvené dekompozice G. □





Věta 10.8. *Pokud graf G má stromovou šířku t a větvenou šířku $b > 1$, tak*

$$b \leq t + 1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\, b \right\rfloor . \square$$

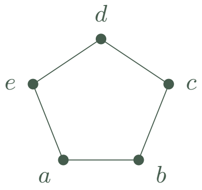
Jiný přístup

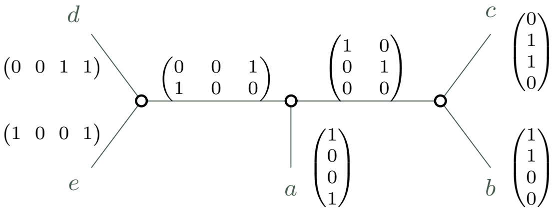
Nechť G je graf a $X \subseteq V(G)$. Jako funkci *hodnosti řezu* $\gamma_G(F)$ na množině F označíme hodnost $X \times (V \setminus X)$-matice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ nad binárním tělesem $GF(2)$, kde $a_{u,v} = 1$ pro $u \in X$ a $v \in V \setminus X$, právě když uv je hranou v G. □

Definice 10.9. Ranková dekompozice grafu G

Nechť T je podkubický strom a $\tau : V(G) \to L(T)$ je bijekce vrcholů grafu G do listů $L(T)$ stromu T. Pro každou hranu x stromu T definujeme šířku x jako $\gamma_G(X)$, kde $X = \tau^{-1}\big(V(T_1)\big)$ pro jednu z komponent T_1, T_2 lesa $T - x$. □

Pak šířkou dekompozice T, τ je maximální šířka ze všech hran T a *rankovou šířkou* grafu G je nejmenší možná šířka rankové dekompozice G.





10.4 Efektivní algoritmy na dekompozicích

Již víme z 7.18, že určení velikosti největší nezávislé množiny v grafu je $\mathcal{NP}$-úplný problém. Stromová dekompozice fixní šířky však tento problém umožňuje řešit velice snadno.

Algoritmus 10.10. Nezávislá množina na stromové dekompozici
Danou stromovou dekompozici vstupního grafu si libovolně „zakořeníme“.

- V každém listě dekompozice vyřešíme problém hrubou silou v konstantním čase. □
- Ve směru od listů ke kořeni sbíráme následující informaci:
  V každém balíku B dekompozice, pro každou $X \subseteq B$, velikost největší nezávislé množiny I v grafu indukovaném na podstromu pod B takové, že $I \cap B = X$. □
- Vzhledem k interpolační vlastnosti naší dekompozice lze výše popsanou informaci v každém balíku dekompozice zjistit v konstantním čase pouze ze znalosti stejné informace ze všech jeho potomků v dekompozici.

Výsledný algoritmus pracuje v čase úměrném počtu uzlů dekompozice, tedy v lineárním čase!

Další problém hledání párování v grafu sice je polynomiálně řešitelný, ale zjišťování počtu všech párování už je *$\#\mathcal{P}$-úplné*, neboli stejně těžké (beznadějné) jako výpočet permanentu matice nebo spočítání všech řešení SAT problému.

Algoritmus 10.11. Počet párování na větvené dekompozici
Opět si větvenou dekompozici vstupního grafu libovolně „zakořeníme“.

- V každém listě dekompozice je řešení triviální. □
- Ve směru od listů ke kořeni sbíráme následující informaci:
  V každé hraně dekompozice, pro každou podmnožinu $X \subseteq S$ vrcholů separace S indukované touto hranou v dekompozici, počet všech párování, která ze separace S „obsazují“ právě vrcholy X. □
- Opět lze výše popsanou informaci na každé hraně dekompozice zjistit v konstantním čase pouze ze znalosti stejné informace z obou jejich podstromů v dekompozici (vzájemným vynásobením a sečtením počtů).

Výsledný algoritmus pracuje v čase úměrném počtu hran dekompozice, tedy opět v lineárním čase.

Jeden všeobecný výsledek

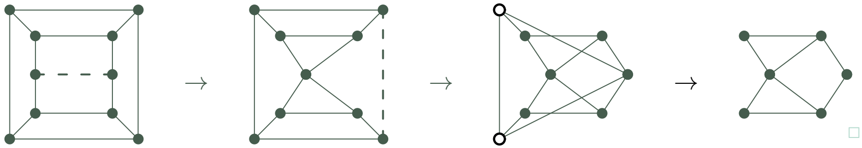
Nápadná vzájemná podobnost předchozích algoritmů určitě není náhodná, chtěli jsme jimi ilustrovat jeden důležitý obecný princip, který objevili postupně [Courcelle / Arnborg, Lagergren, Seese / Borie, Parker, Tovey].

Věta 10.12. *Každá vlastnost grafů, která je vyjádřitelná v tzv. (E)MSO jazyce, se dá vypočítat v lineárním čase pro všechny grafy omezené stromové šířky.*

Pro zjednodušení nebudeme přesně definovat, co (E)MSO jazyk znamená, ale zhruba jde o jazyk, který má dovoleno kvantifikovat přes podmnožiny vrcholů a hran grafu a enumerovat počty prvků množin. Většina grafových vlastností, které jsme zatím probírali, spadá do této kategorie.

10.5 Minory v grafech

Definice: Říkáme, že graf G je *minorem* grafu H, pokud lze G získat z H kontrakcemi hran a vypouštěním vrcholů a hran.



Robertson–Seymourova věta

Věta 10.13. *Mějme libovolnou grafovou vlastnost ϕ, která je uzavřená na minory (tj. pokud G má ϕ, pak každý minor G má také ϕ).*

Pak existuje konečně mnoho grafů $F_1, \ldots, F_\ell$ (zakázané minory) takových, že G má ϕ právě když G neobsahuje minor isomorfní žádnému z $F_1, \ldots, F_\ell$.

Mimo jiné lze tudíž vlastnost ϕ rozhodnout v čase $O(n^3)$ pro každý n-vrcholový graf G.

□

Poznámka: Tato věta je zcela nekonstruktivní, neboli nepodává žádný návod, jak zmíněný algoritmus sestrojit!