Matematika III – 9. přednáška
Hamiltonovské kružnice, stromy, rovinné grafy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24. 11. 2010

Obsah přednášky

1. Eulerovské grafy a hamiltonovské kružnice

2. Stromy
   - Izomorfismy stromů

3. Rovinné grafy
   - Platónská tělesa
   - Barvení map

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/
- Donald E. Knuth, The Stanford GraphBase, ACM, New York, 1993 (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/sgb.html`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, http://www.fi.muni.cz/˜hlineny/Vyuka/GT/
- Donald E. Knuth, The Stanford GraphBase, ACM, New York, 1993 (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/sgb.html`).

Plán přednášky

1. Eulerovské grafy a hamiltonovské kružnice
2. Stromy
   - Izomorfismy stromů
3. Rovinné grafy
   - Platónská tělesa
   - Barvení map

Eulerovské grafy – opakování

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Eulerovské grafy – opakování

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důsledek

Graf lze nakreslit jedním tahem právě tehdy, když má všechny stupně vrcholů sudé nebo když existují právě dva vrcholy se stupněm lichým.

Věta

Orientovaný graf G je eulerovský právě když je vyvážený a jeho symetrizace je souvislý graf (tj. graf G je slabě souvislý).

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).
Zřejmě je v případě, že graf G je eulerovský, nejkratším takovým sledem příslušný eulerovský tah.

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).
Zřejmě je v případě, že graf G je eulerovský, nejkratším takovým sledem příslušný eulerovský tah.
V opačném případě nutně graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně. Tento graf je třeba přidáváním hran doplnit na eulerovský (multi)graf (později ukážeme, že v případě stromů to znamená nutnost zdvojení všech hran). Snadno lze ukázat, že to lze udělat v polynomiálním čase jak v orientovaném, tak neorientovaném případě, v případě multigrafů je to však problém **NP-úplný**.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici. Zatímco (zdánlivě podobně složitý) problém nalezení eulerovského tahu je triviální, zjistit, zda je daný graf hamiltonovský, je **NP-úplný problém**.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici.
Zatímco (zdánlivě podobně složitý) problém nalezení eulerovského tahu je triviální, zjistit, zda je daný graf hamiltonovský, je **NP-úplný problém**.
V praxi je ovšem problém nalezení hamiltonovské kružnice (či jeho modifikace – např. problém obchodního cestujícího) podstatou mnoha problémů v logistice, je proto často žádoucí nalezení i suboptimálního řešení (v případě problému obchodního cestujícího).

Příklad (Icosian Game – William Rovan Hamilton)

Nalezněte hamiltonovskou kružnici v grafu tvořeném vrcholy a hranami pravidelného dodekaedru (dvanáctistěnu) – viz http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200201hamilton.jpg

Příklad

Existuje hamiltonovská kružnice v Petersenově grafu?

Příklad (Icosian Game – William Rovan Hamilton)

Nalezněte hamiltonovskou kružnici v grafu tvořeném vrcholy a hranami pravidelného dodekaedru (dvanáctistěnu) – viz `http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200201hamilton.jpg`

Příklad

Existuje hamiltonovská kružnice v Petersenově grafu?

Věta (Dirac (1952))

Má-li v grafu G s $n \geq 3$ vrcholy každý vrchol stupeň alespoň $n/2$, je G hamiltonovský.

Věta (Ore (1960))

Má-li v grafu G s $n \geq 4$ vrcholy každá dvojice nesousedních vrcholů součet stupňů alespoň n, je G hamiltonovský.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran $\{u, v\}$ takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran $\{u, v\}$ takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran $\{u, v\}$ takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Je vidět, že Oreho (a tedy i Diracova) věta je jednoduchým důsledkem této věty.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran $\{u, v\}$ takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Je vidět, že Oreho (a tedy i Diracova) věta je jednoduchým důsledkem této věty.

Důkaz.

Zřejmě stačí dokázat, že pokud je G hamiltonovský po přidání hrany $\{u, v\}$ takové, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, pak je hamiltonovský i bez této hrany. Předpokládejme, že $G + uv$ je hamiltonovský a G nikoliv. Pak existuje hamiltonovská cesta v G z u do v. Pro každý vrchol sousedící s u platí, že jeho předchůdce na této cestě nemůže sousedit s v (jinak bychom měli hamiltonovskou kružnici v G). Tedy $\deg(u) + \deg(v) \leq n - 1$. □

Plán přednášky

1 Eulerovské grafy a hamiltonovské kružnice

2 Stromy
- Izomorfismy stromů

3 Rovinné grafy
- Platónská tělesa
- Barvení map

Stromy

Definice

Souvislý graf neobsahující kružnici, se nazývá **strom**. Obecně v grafech nazýváme vrcholy stupně jedna **listy** (případně také **koncové vrcholy**). Graf neobsahující kružnice nazýváme **les**.

Tato definice nicméně není úplně nejvhodnější pro praktickou kontrolu – uvedeme proto za chvíli hned 5 ekvivalentních definic. Následující lemma ukazuje, že každý strom lze vybudovat postupně z jediného vrcholu přidáváním listů:

Stromy

Definice

Souvislý graf neobsahující kružnici, se nazývá **strom**. Obecně v grafech nazýváme vrcholy stupně jedna **listy** (případně také **koncové vrcholy**). Graf neobsahující kružnice nazýváme **les**.

Tato definice nicméně není úplně nejvhodnější pro praktickou kontrolu – uvedeme proto za chvíli hned 5 ekvivalentních definic. Následující lemma ukazuje, že každý strom lze vybudovat postupně z jediného vrcholu přidáváním listů:

Lemma

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy. Pro libovolný graf G s listem v jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- *G je strom;*
- *$G \setminus v$ je strom.*

Charakterizace stromů

Věta

Pro každý graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. *G je strom;*
2. *pro každé dva vrcholy v, w grafu G existuje právě jedna cesta z v do w;*
3. *graf G je souvislý, ale vyjmutím libovolné hrany vznikne nesouvislý graf*
4. *graf G neobsahuje kružnici, každým přidáním hrany do grafu G však již kružnice vznikne*
5. *G je souvislý graf a mezi velikostí množin jeho vrcholů a hran platí vztah (Eulerův vzorec) $|V| = |E| + 1$.*

Důkaz jednotlivých implikací obvykle vedeme indukcí podle počtu vrcholů s využitím lemmatu o výstavbě stromů.

Stromy jako datové struktury

Stromy se často používají jako (acyklické) datové struktury, v praxi stromy procházíme v určitém pořadí vrcholů – narozdíl od grafů k jednoznačnému určení nějakého uspořádání vrcholů stačí vybrat jeden vrchol – *kořen* (root) v_r.

Ve stromu není žádná kružnice, proto volba jednoho vrcholu v_r zadává orientaci všech hran.

Stromy jako datové struktury

Stromy se často používají jako (acyklické) datové struktury, v praxi stromy procházíme v určitém pořadí vrcholů – narozdíl od grafů k jednoznačnému určení nějakého uspořádání vrcholů stačí vybrat jeden vrchol – *kořen* (root) v_r.

Ve stromu není žádná kružnice, proto volba jednoho vrcholu v_r zadává orientaci všech hran.

Po výběru **kořenu** se začíná graf více podobat skutečnému stromu v přírodě. Stromy s jedním vybraným kořenem nazýváme **kořenové stromy**.

Stromy jako datové struktury

Stromy se často používají jako (acyklické) datové struktury, v praxi stromy procházíme v určitém pořadí vrcholů – narozdíl od grafů k jednoznačnému určení nějakého uspořádání vrcholů stačí vybrat jeden vrchol – *kořen* (root) v_r.
Ve stromu není žádná kružnice, proto volba jednoho vrcholu v_r zadává orientaci všech hran.
Po výběru **kořenu** se začíná graf více podobat skutečnému stromu v přírodě. Stromy s jedním vybraným kořenem nazýváme **kořenové stromy**.

Definice

V kořenovém stromu $T = (V, E)$ je vrchol w je **následník vrcholu** v a naopak v je předchůdce vrcholu w právě tehdy, když existuje cesta z kořene stromu do w která prochází v a $v \neq w$. **Přímý následník** a **přímý předchůdce** vrcholu jsou pak následníci a předchůdci přímo spojení hranou. Mluvíme také o **synech** a **otcích** (patrně v narážce na genealogické stromy).

Definice

Binární stromy jsou speciálním případem kořenového stromu, kdy každý otec má nejvýše dva následníky (někdy se ale pod stejným označením binární strom předpokládá, že všechny vrcholy kromě listů mají právě dva následníky).

Definice

Binární stromy jsou speciálním případem kořenového stromu, kdy každý otec má nejvýše dva následníky (někdy se ale pod stejným označením binární strom předpokládá, že všechny vrcholy kromě listů mají právě dva následníky).

Často jsou vrcholy stromu spojeny s klíči v nějaké úplně uspořádané množině (např. reálná čísla) a slouží k hledání vrcholu s daným klíčem.
Je realizováno jako hledání cesty od kořene stromu a v každém vrcholu se podle velikosti rozhodujeme, do kterého ze synů budeme pokračovat (resp. zastavíme hledání, pokud jsme již ve hledaném vrcholu). Abychom mohli tuto cestu jednoznačně krok po kroku určovat, požadujeme aby jeden syn společně se všemi jeho následníky měli menší klíče než druhý syn a všichni jeho následníci.

Pro efektivní vyhledávání užíváme **vyvážené binární stromy**, ve kterých se délky cest z kořene do listů liší maximálně o jedničku.

Pro efektivní vyhledávání užíváme **vyvážené binární stromy**, ve kterých se délky cest z kořene do listů liší maximálně o jedničku. Nejdále od vyváženého stromu na n vrcholech je tedy cesta P_n (která formálně může být považována za binární strom), zatímco dokonale vyvážený strom, kde kromě listů má každý otec právě dva syny je možné sestrojit pouze pro hodnoty $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Pro efektivní vyhledávání užíváme **vyvážené binární stromy**, ve kterých se délky cest z kořene do listů liší maximálně o jedničku. Nejdále od vyváženého stromu na n vrcholech je tedy cesta P_n (která formálně může být považována za binární strom), zatímco dokonale vyvážený strom, kde kromě listů má každý otec právě dva syny je možné sestrojit pouze pro hodnoty $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$.
Ve vyvážených stromech dohledání vrcholu podle klíče bude vždy vyžadovat pouze $O(\log_2 n)$ kroků. Hovoříme v této souvislosti také často o **binárních vyhledávacích stromech**.

Pro efektivní vyhledávání užíváme **vyvážené binární stromy**, ve kterých se délky cest z kořene do listů liší maximálně o jedničku. Nejdále od vyváženého stromu na n vrcholech je tedy cesta P_n (která formálně může být považována za binární strom), zatímco dokonale vyvážený strom, kde kromě listů má každý otec právě dva syny je možné sestrojit pouze pro hodnoty $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$.
Ve vyvážených stromech dohledání vrcholu podle klíče bude vždy vyžadovat pouze $O(\log_2 n)$ kroků. Hovoříme v této souvislosti také často o **binárních vyhledávacích stromech**.
Jako cvičení si rozvažte, jak lze účinně vykonávat základní operace s grafy (přidávání a odebírání vrcholů se zadanými klíči, včetně vyvážení) nad binárními vyhledávacími stromy.

Izomorfismus stromů

Již dříve jsme si říkali, že rozhodnout o izomorfismu dvou obecných grafů je velmi obtížný problém. U stromů je naštěstí, jak si ukážeme, situace podstatně jednodušší.

Izomorfismus stromů

Již dříve jsme si říkali, že rozhodnout o izomorfismu dvou obecných grafů je velmi obtížný problém. U stromů je naštěstí, jak si ukážeme, situace podstatně jednodušší. Pro popis všech možných izomorfismů (kořenových) stromů je užitečné kromě vztahů otec–syn ještě užitečné mít syny uspořádány v pořadí (třeba v představě odleva doprava nebo podle postupného růstu atd.).

Izomorfismus stromů

Již dříve jsme si říkali, že rozhodnout o izomorfismu dvou obecných grafů je velmi obtížný problém. U stromů je naštěstí, jak si ukážeme, situace podstatně jednodušší. Pro popis všech možných izomorfismů (kořenových) stromů je užitečné kromě vztahů otec–syn ještě užitečné mít syny uspořádány v pořadí (třeba v představě odleva doprava nebo podle postupného růstu atd.).

Definice

Pěstěný strom $T = (V, E, v_r, \nu)$ je kořenový strom společně s částečným uspořádáním ν na hranách takovým, že srovnatelné jsou vždy právě hrany směřující od jednoho otce k synům.
Izomorfismem kořenových stromů $T = (V, E, v_r)$ a $T' = (V', E', v_r')$ rozumíme takový izomorfismus grafů $\varphi : T \to T'$, který převádí v_r na v_r'.
Pro pěstěné stromy navíc požadujeme aby zobrazení hran zachovávalo částečná uspořádání ν a ν'.

Kódy stromů

Pro pěstěné stromy $T = (V, E, v_r, \nu)$ zavedeme jejich (jak uvidíme) jednoznačný popis pomocí slov z nul a jedniček. Obrazně si můžeme představit, že strom kreslíme a každý přírůstek naznačíme dvěma tahy, které si označíme 0 (dolů) a 1 (nahoru). Začneme od listů (příp. mimo kořene), kterým všem přiřadíme slovo 01. Celý strom pak budeme popisovat zřetězováním částí slov tak, že má-li otec v syny uspořádány jako posloupnost $v_1, \dots, v_\ell$, a jsou-li již jednotliví synové označeni slovy $W_1, \dots W_\ell$, pak pro otce použijeme slovo

$$0W_1 \dots W_\ell 1.$$

Hovoříme o **kódu pěstěného stromu**.

Kódy stromů

Pro pěstěné stromy $T = (V, E, v_r, \nu)$ zavedeme jejich (jak uvidíme) jednoznačný popis pomocí slov z nul a jedniček. Obrazně si můžeme představit, že strom kreslíme a každý přírůstek naznačíme dvěma tahy, které si označíme 0 (dolů) a 1 (nahoru). Začneme od listů (příp. mimo kořene), kterým všem přiřadíme slovo 01. Celý strom pak budeme popisovat zřetězováním částí slov tak, že má-li otec v syny uspořádány jako posloupnost $v_1, \dots, v_\ell$, a jsou-li již jednotliví synové označeni slovy $W_1, \dots W_\ell$, pak pro otce použijeme slovo

$$0W_1 \dots W_\ell 1.$$

Hovoříme o **kódu pěstěného stromu**.
Skutečně, kreslením cest dolů a nahoru získáme skutečně původní strom s jednou hranou směřující shora do kořene navíc.

Věta

Dva pěstěné stromy jsou izomorfní právě, když mají stejný kód.

Důkaz.

Z konstrukce je zřejmé, že izomorfní stromy budou mít stejný kód, zbývá tedy pouze dokázat, že neizomorfní stromy vedou na různé kódy, jinými slovy, že z daného kódy jednoznačně zrekonstruujeme výchozí pěstovaný strom.

Dokážeme to indukcí podle délky kódu (tj. počtu nul a jedniček) tak, že využijeme jednoznačné kódy pro všechny podstromy vzniklé odjemutím kořene.

Věta

Dva pěstěné stromy jsou izomorfní právě, když mají stejný kód.

Důkaz.

Z konstrukce je zřejmé, že izomorfní stromy budou mít stejný kód, zbývá tedy pouze dokázat, že neizomorfní stromy vedou na různé kódy, jinými slovy, že z daného kódy jednoznačně zrekonstruujeme výchozí pěstovaný strom.

Dokážeme to indukcí podle délky kódu (tj. počtu nul a jedniček) tak, že využijeme jednoznačné kódy pro všechny podstromy vzniklé odjemutím kořene.

Pro nejkratší kód 01 je situace snadná.

Věta

Dva pěstěné stromy jsou izomorfní právě, když mají stejný kód.

Důkaz.

Z konstrukce je zřejmé, že izomorfní stromy budou mít stejný kód, zbývá tedy pouze dokázat, že neizomorfní stromy vedou na různé kódy, jinými slovy, že z daného kódy jednoznačně zrekonstruujeme výchozí pěstovaný strom.

Dokážeme to indukcí podle délky kódu (tj. počtu nul a jedniček) tak, že využijeme jednoznačné kódy pro všechny podstromy vzniklé odjemutím kořene.

Pro nejkratší kód 01 je situace snadná. V indukčním kroku je dán kód délky $2(n+1)$ tvaru $0A1$, přičemž $A = A_1A_2 \dots A_t$ je zřetězením několika kódů pěstovaných stromů. Část A_1 je tvořena nejkratším prexifex A, který má stejný počet 0 a 1, dále A_2, atd. Podle indukčního předpokladu každé A_i jednoznačně odpovídá pěstěnému stromu, z čehož zřejmě dostáváme jediný pěstěný strom odpovídající kódu $0A1$. $\square$

Nyní převedeme testování izomorfismu kořenových stromů, resp. stromů na testování pěstěných stromů.

Nyní převedeme testování izomorfismu kořenových stromů, resp. stromů na testování pěstěných stromů.
U kořenových stromů lze využít kódy, pokud se podaří určit pořadí jejich synů jednoznačně až na izomorfismus. Na pořadí synů ovšem nezáleží právě tehdy, když jsou podgrafy určené jejich následníky izomorfní.

Nyní převedeme testování izomorfismu kořenových stromů, resp. stromů na testování pěstěných stromů.
U kořenových stromů lze využít kódy, pokud se podaří určit pořadí jejich synů jednoznačně až na izomorfismus. Na pořadí synů ovšem nezáleží právě tehdy, když jsou podgrafy určené jejich následníky izomorfní.
Využijeme proto obdobu (rekurzivní) konstrukce kódu pro pěstěné stromy – budeme postupovat obdobně s využitím lexikografického (slovníkového) uspořádní synů podle jejich kódů. Kořenový strom budeme tedy popisovat zřetězováním částí slov tak, že má-li otec v syny již označeny kódy $W_1, \dots W_\ell$, pak pro otce použijeme slovo

$$0 W_1 \dots W_\ell 1$$

kde pořadí $W_1, \dots, W_\ell$ je zvoleno tak aby $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_\ell$.

Pokud není určen kořen ve stromě, můžeme jej určit tak, aby byl „přibližně uprostřed stromu“.

Pokud není určen kořen ve stromě, můžeme jej určit tak, aby byl „přibližně uprostřed stromu“.
Každému vrcholu stromu T přiřadíme hodnotou $\mathrm{ex}_G(v)$ tzv. **výstřednosti** (excentricity), kterou definujeme pro každý vrchol v jako maximální vzdálenost z v do jiného vrcholu w v T.

Tvrzení

Buď $C(T)$ množina vrcholů stromu T, jejichž výstřednost nabývá minimální hodnoty ($C(T)$ se nazývá střed/centrum grafu, minimální hodnota pak poloměr grafu). Pak $C(T)$ má jeden vrchol nebo dva vrcholy spojené hranou v T.

Pokud není určen kořen ve stromě, můžeme jej určit tak, aby byl „přibližně uprostřed stromu“.
Každému vrcholu stromu T přiřadíme hodnotou $\mathrm{ex}_G(v)$ tzv. **výstřednosti** (excentricity), kterou definujeme pro každý vrchol v jako maximální vzdálenost z v do jiného vrcholu w v T.

Tvrzení

Buď $C(T)$ množina vrcholů stromu T, jejichž výstřednost nabývá minimální hodnoty ($C(T)$ se nazývá střed/centrum grafu, minimální hodnota pak poloměr grafu). Pak $C(T)$ má jeden vrchol nebo dva vrcholy spojené hranou v T.

Důkaz.

Snadno indukcí s využitím triviálního faktu, že nejvzdálenějším vrcholem od každého vrcholu v je nutně list. Centrum T tedy splývá s centrem stromu T', který vznikne z T vypuštěním listů a příslušných hran. $\square$

Libovolnému stromu přiřadíme jednoznačný kód, až na izomorfismus takto: Pokud je v centru T jediný vrchol, použijeme jej jako kořen; v opačném případě vytvoříme stejným způsobem kód pro dva stromy vzniklé z T odebráním hrany (bez vrcholů) spojující vrcholy x_1, x_2 v $C(T)$ a kód vznikne zřetězením kódů obou kořenových stromů $(T_1, x_1), (T_2, x_2)$ v pořadí podle lexikografického uspořádání těchto kódů.

Libovolnému stromu přiřadíme jednoznačný kód, až na izomorfismus takto: Pokud je v centru T jediný vrchol, použijeme jej jako kořen; v opačném případě vytvoříme stejným způsobem kód pro dva stromy vzniklé z T odebráním hrany (bez vrcholů) spojující vrcholy x_1, x_2 v $C(T)$ a kód vznikne zřetězením kódů obou kořenových stromů $(T_1, x_1), (T_2, x_2)$ v pořadí podle lexikografického uspořádání těchto kódů.

Věta

Dva stromy T a T' jsou izomorfní právě, když mají společný kód.

Libovolnému stromu přiřadíme jednoznačný kód, až na izomorfismus takto: Pokud je v centru T jediný vrchol, použijeme jej jako kořen; v opačném případě vytvoříme stejným způsobem kód pro dva stromy vzniklé z T odebráním hrany (bez vrcholů) spojující vrcholy x_1, x_2 v $C(T)$ a kód vznikne zřetězením kódů obou kořenových stromů $(T_1, x_1), (T_2, x_2)$ v pořadí podle lexikografického uspořádání těchto kódů.

Věta

Dva stromy T a T' jsou izomorfní právě, když mají společný kód.

Poznámka

Z uvedených úvah lze snadno nahlédnout, že algoritmus na testování izomorfismu stromů lze implementovat v lineárním čase vzhledem k počtu vrcholů.

Plán přednášky

1 Eulerovské grafy a hamiltonovské kružnice

2 Stromy
- Izomorfismy stromů

3 Rovinné grafy
- Platónská tělesa
- Barvení map

Rovinné grafy

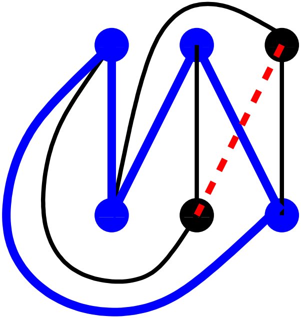
Velice často se setkáváme s grafy, které jsou nakresleny v rovině. To znamená, že každý vrchol grafu je ztotožněn s nějakým bodem v rovině a hrany mezi vrcholy v a w odpovídají spojitým křivkám $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ spojujícím vrcholy $c(0) = v$ a $c(1) = w$. Pokud navíc platí, že se jednotlivé dvojice hran protínají nejvýše v koncových vrcholech, pak hovoříme o **rovinném grafu** G.

Rovinné grafy

Velice často se setkáváme s grafy, které jsou nakresleny v rovině. To znamená, že každý vrchol grafu je ztotožněn s nějakým bodem v rovině a hrany mezi vrcholy v a w odpovídají spojitým křivkám $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ spojujícím vrcholy $c(0) = v$ a $c(1) = w$.
Pokud navíc platí, že se jednotlivé dvojice hran protínají nejvýše v koncových vrcholech, pak hovoříme o **rovinném grafu** G.
Otázka, jestli daný graf připouští realizaci (nakreslení) jako rovinný graf, vyvstává velice často v aplikacích.

Jednoduchý příklad je následující:
Tři dodavatelé vody, elektřiny a plynu mají každý své jedno přípojné místo v blízkosti tří rodinných domků. Chtějí je všichni napojit tak, aby se jejich sítě nekřížily (třeba se jim nechce kopat příliš hluboko. . .). Je to možné zvládnout? Odpověď zní „není“.

Jednoduchý příklad je následující:
Tři dodavatelé vody, elektřiny a plynu mají každý své jedno přípojné místo v blízkosti tří rodinných domků. Chtějí je všichni napojit tak, aby se jejich sítě nekřížily (třeba se jim nechce kopat příliš hluboko. . .). Je to možné zvládnout? Odpověď zní „není“. Jde o bipartitní úplný graf $K_{3,3}$, kde tři vrcholy představují přípojná místa, další tři pak domky. Hrany jsou linie sítí. Všechny hrany umíme zvládnout, jedna poslední ale už nejde, viz obrázek na kterém neumíme čárkovanou hranu nakreslit bez křížení:



Obecně se dá ukázat tzv. Kuratowského věta:

Věta

Graf G je rovinný právě tehdy když žádný jeho podgraf není izomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ nebo grafu K_5.

Obecně se dá ukázat tzv. Kuratowského věta:

Věta

Graf G je rovinný právě tehdy když žádný jeho podgraf není izomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ nebo grafu K_5.

Jedna implikace je zřejmá – dělením rovinného grafu vzniká vždy opět rovinný graf a jestliže podgraf nelze v rovině nakreslit bez křížení, totéž musí platit i pro celý graf G. Opačný směr důkazu je naopak velice složitý a nebudeme se jím zde zabývat.

Obecně se dá ukázat tzv. Kuratowského věta:

Věta

Graf G je rovinný právě tehdy když žádný jeho podgraf není izomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ nebo grafu K_5.

Jedna implikace je zřejmá – dělením rovinného grafu vzniká vždy opět rovinný graf a jestliže podgraf nelze v rovině nakreslit bez křížení, totéž musí platit i pro celý graf G. Opačný směr důkazu je naopak velice složitý a nebudeme se jím zde zabývat.
Problematice rovinných grafů je věnováno ve výzkumu a aplikacích hodně pozornosti, my se zde omezíme pouze na vybrané ilustrace.
Zmiňme alespoň naokraj, že existují algoritmy, které testují rovinnost grafu na n vrcholech v čase $O(n)$, což určitě nejde přímou aplikací Kuratowského věty.

Uvažme (konečný) rovinný graf G, včetně jeho nakreslení v $\mathbb{R}^2$ a nechť $\mathbb{R}^2 \setminus G$ je množina všech bodů $x \in \mathbb{R}^2$, které nepatří žádné hraně, ani nejsou vrcholem. Množina $\mathbb{R}^2 \setminus G$ se rozpadne na disjunktní souvislé podmnožiny S_i, kterým říkáme **stěny rovinného grafu** G. Jedna stěna je výjimečná – ta jejíž doplněk obsahuje všechny vrcholy grafu. Budeme jí říkat neohraničená stěna S_0. Množinu všech stěn budeme označovat $S = \{S_0, S_1, \dots, S_k\}$ a rovinný graf $G = (V, E, S)$.

Jako příklad si můžeme rozebrat stromy. Každý strom je zjevně rovinný graf, jak je vidět například z možnosti realizovat jej postupným přidáváním listů k jedinému vrcholu. Samozřejmě také můžeme použít Kuratowského větu – když není v G žádná kružnice, nemůže obsahovat jakékoliv dělení grafů $K_{3,3}$ nebo K_5. Protože strom G neobsahuje žádnou kružnici, dostáváme pouze jedinou stěnu S_0 a to tu neohraničenou. Protože víme, jaký je rozdíl mezi počty vrcholů a hran pro všechny stromy, dostáváme vztah

$$|V| - |E| + |S| = 2.$$

Vztah mezi počty hran, stěn a vrcholů lze odvodit pro všechny rovinné grafy. Jde o tzv. Eulerův vztah. Všimněme si, že z něho zejména vyplývá, že počet stěn v rovinném grafu nezávisí na způsobu, jaké jeho rovinné nakreslení vybereme.

Věta

Nechť $G = (V, E, S)$ je souvislý rovinný graf. Pak platí

$$|V| - |E| + |S| = 2.$$

Vztah mezi počty hran, stěn a vrcholů lze odvodit pro všechny rovinné grafy. Jde o tzv. Eulerův vztah. Všimněme si, že z něho zejména vyplývá, že počet stěn v rovinném grafu nezávisí na způsobu, jaké jeho rovinné nakreslení vybereme.

Věta

Nechť $G = (V, E, S)$ je souvislý rovinný graf. Pak platí

$$|V| - |E| + |S| = 2.$$

Důkaz.

Indukcí podle počtu hran. □

Rovinné grafy si můžeme dobře představit jako namalované na povrchu koule místo v rovině. Sféra vznikne z roviny tak, že přidáme jeden bod „v nekonečnu“. Opět můžeme stejným způsobem hovořit o stěnách a pro takovýto graf pak jsou všechny jeho stěny rovnocenné (i stěna S_0 je ohraničená).

Rovinné grafy si můžeme dobře představit jako namalované na povrchu koule místo v rovině. Sféra vznikne z roviny tak, že přidáme jeden bod „v nekonečnu". Opět můžeme stejným způsobem hovořit o stěnách a pro takovýto graf pak jsou všechny jeho stěny rovnocenné (i stěna S_0 je ohraničená).
Naopak, každý konvexní mnohostěn $P \subset \mathbb{R}^3$ si můžeme představit jako graf nakreslený na povrchu koule. Vypuštěním jednoho bodu uvnitř jedné ze stěn (ta stane neohraničenou stěnou S_0) pak obdržíme rovinný graf jako výše.

Rovinné grafy, které vzniknou z konvexních mnohostěnů, jsou zjevně 2–souvislé, protože každé dva vrcholy v konvexním mnohostěnu leží na společné kružnici. Navíc v nich platí, že každá stěna kromě S_0 je vnitřkem nějaké kružnice a S_0 je vnějškem nějaké kružnice. Názorné se zdá i to, že ve skutečnosti budou grafy vznikající z konvexních mnohostěnů 3–souvislé.

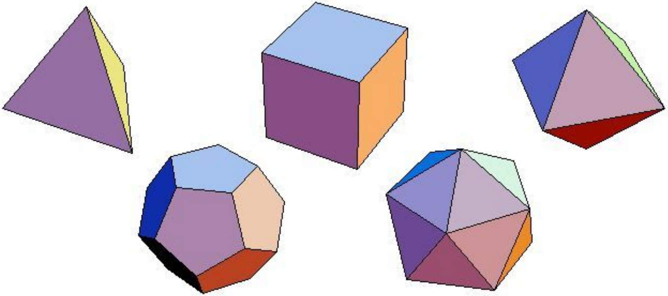
Rovinné grafy, které vzniknou z konvexních mnohostěnů, jsou zjevně 2–souvislé, protože každé dva vrcholy v konvexním mnohostěnu leží na společné kružnici. Navíc v nich platí, že každá stěna kromě S_0 je vnitřkem nějaké kružnice a S_0 je vnějškem nějaké kružnice. Názorné se zdá i to, že ve skutečnosti budou grafy vznikající z konvexních mnohostěnů 3–souvislé.
Ve skutečnosti platí dosti náročná Steinitzova věta:

Věta

Libovolný vrcholově 3–souvislý rovinný graf G vzniká z konvexního mnohostěnu v $\mathbb{R}^3$.

Jako ilustraci kombinatorické práce s grafy odvodíme klasifikaci tzv. pravidelních mnohostěnů, tj. mnohostěnů poskládaných ze stejných pravidelných mnohoúhelníků tak, že se jich v každém vrcholu dotýká stejný počet. Již v dobách antického myslitele Platóna se vědělo, že jich je pouze pět:

Jako ilustraci kombinatorické práce s grafy odvodíme klasifikaci tzv. pravidelních mnohostěnů, tj. mnohostěnů poskládaných ze stejných pravidelných mnohoúhelníků tak, že se jich v každém vrcholu dotýká stejný počet. Již v dobách antického myslitele Platóna se vědělo, že jich je pouze pět:



Přeložíme si požadavek pravidelnosti do vlastností příslušného grafu: chceme aby každý vrchol měl stejný stupeň $d \geq 3$ a zároveň aby na hranici každé stěny byl stejný počet $k \geq 3$ vrcholů.
Označme n počet vrcholů, e počet hran a s počet stěn.
Máme k dispozici jednak vztah provazující stupně vrcholů s počtem hran:

$$dn = 2e$$

Přeložíme si požadavek pravidelnosti do vlastností příslušného grafu: chceme aby každý vrchol měl stejný stupeň $d \geq 3$ a zároveň aby na hranici každé stěny byl stejný počet $k \geq 3$ vrcholů.
Označme n počet vrcholů, e počet hran a s počet stěn.
Máme k dispozici jednak vztah provazující stupně vrcholů s počtem hran:

$$dn = 2e$$

a podobně počítáme počet hran, které ohraničují jednotlivé stěny, a bereme v úvahu, že každá je hranicí dvou stěn, tj.

$$2e = ks.$$

Eulerův vztah pak říká

$$2 = n - e + s = \frac{2e}{d} - e + \frac{2e}{k}.$$

Úpravou odtud dostáváme pro naše známé d a k vztah

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

Protože e a n musí být přirozená čísla (tj. zejména je $\frac{1}{e} > 0$) a minimum pro d i k je 3, dostáváme přímou diskusí všech možností tento výčet:

d	k	n	e	s
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

Tabulka zadává všechny možnosti. Ve skutečnosti ale také všechny odpovídající pravidelné mnohostěny existují - již jsme je viděli.

Maximální počet hran

Věta

Nechť (V, E, S) *je rovinný graf s aspoň třemi vrcholy. Pak*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Rovnost přitom nastává pro maximální rovinný graf, tj. rovinný graf, k němuž nejde při zachování rovinnosti přidat žádnou hranu. Pokud navíc uvažovaný graf neobsahuje trojúhelník (tj. K_3 *jako podgraf), platí dokonce* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Maximální počet hran

Věta

Nechť (V, E, S) *je rovinný graf s aspoň třemi vrcholy. Pak*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Rovnost přitom nastává pro maximální rovinný graf, tj. rovinný graf, k němuž nejde při zachování rovinnosti přidat žádnou hranu. Pokud navíc uvažovaný graf neobsahuje trojúhelník (tj. K_3 *jako podgraf), platí dokonce* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Důkaz.

Maximální rovinný graf má všechny stěny ohraničené kružnicí délky 3, z čehož plyne $3|S| = 2|E|$ a odtud již pomocí Eulerova vztahu dostáváme první tvrzení. Podobně v druhé části. □

Důsledek

- K_5 *není rovinný;*

Důsledek

- K_5 *není rovinný;*
- $K_{3,3}$ *není rovinný;*

Důsledek

- K_5 *není rovinný;*
- $K_{3,3}$ *není rovinný;*
- *každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5;*

Důsledek

- *K_5 není rovinný;*
- *$K_{3,3}$ není rovinný;*
- *každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5;*
- *každý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 3.*

Problém čtyř barev

Jedním z nejznámějších kombinatorických problémů je otázka:

Je možné každou mapu obarvit 4 barvami?

Tento problém sice na první pohled vypadá ryze geometricky, ale dá se přeformulovat do kombinatorické podoby.

Definice

Mapou nazýváme souvislý rovinný multigraf bez mostů. *Normální mapou* pak mapu, jejíž všechny vrcholy jsou stupně 3. *Obarvení mapy* je funkce, která každé stěně mapy přiřadí číslo (barvu).

Problém čtyř barev byl rozřešen teprve po více než sto letech bádání – mnoho matematiků na prezentovaný důkaz stále pohlíží s despektem, protože je založen na prověření velkého množství případů pomocí počítače. Elementárními kombinatorickými prostředky je možné alespoň dokázat možnost obarvení normálních map pěti barvami – viz literatura.

Věta (Appel, Haken (1976))

Každou normální mapu je možné obarvit pomocí čtyř barev.