Eulerův vztah

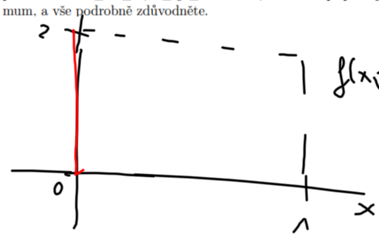
$e + 2 = n + s$

Důsledek:

$e \leq 3n - 6$

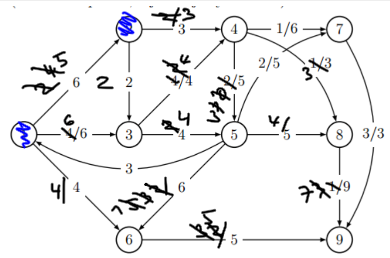
1 9-9:02

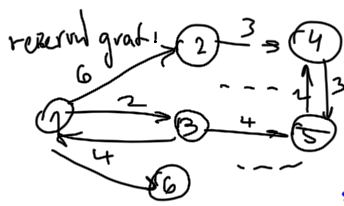
1. (5 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na množině určené podmínkami $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$. Určete, v kterém případě jde o maximum, resp. o minimum, a vše podrobně zdůvodněte.



$f(x,1) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$

1 9-9:09





min řez

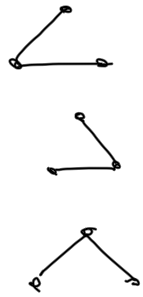
dosaž. že z=1

{1,2}

řez: {1,3},{1,6}

{2,4},{2,3}

1 9-9:16



3 kostry na 3 vrcholech

1 9-9:45

$y^3 - 2xy + x^2 = 0$

v okolí $[1,1]$: $y = f(x)$

x_0, y_0

Taylor 2. stupně

$(*)$ $(x-1)$

$T_f(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) +$

$+ \frac{1}{2!} y''(x_0)\cdot(x - x_0)^2$

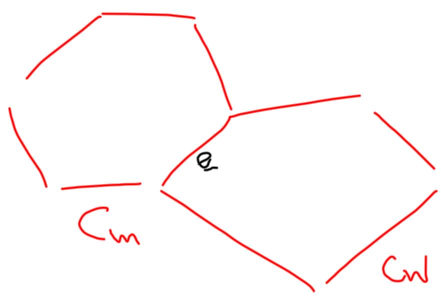
deriv.: $3y(x)^2 \cdot y'(x) - 2y - 2x \cdot y'(x) + 2x = 0$

$y'(x)\left[3y(x)^2 - 2x\right] = 2y(x) - 2x$

$x = 1$ $\quad y'(1)\cdot[3 - 2] = 2 \cdot 2$

$y'(1) = 0$ $(*)$

1 9-9:47



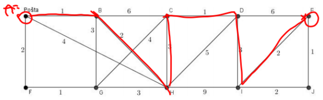
Počet koster: I. vyjmeme e a jednu další: $(m-1)+(n-1)$ možností

II. e zůstane: $(m-1)\cdot(n-1)$

Celkem $(m-1)\cdot(n-1) + m-1 + n-1 =$

$= mn - 1$

1 9-9:55



Postup: ① je-li eulerovský, jsme hotovi (skoro)

② není-li: najdeme vrcholy lichého stupně (je jich sudý počet)

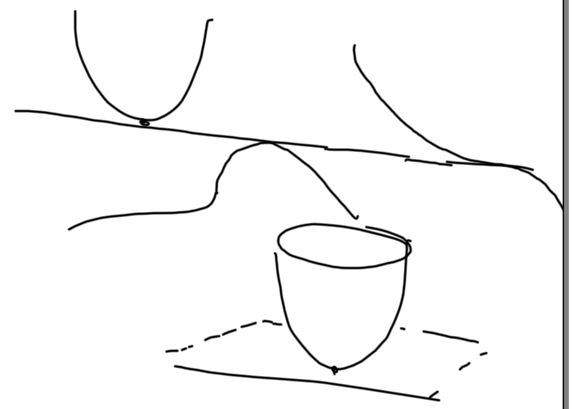
③ najdou se nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů lichého stupně délka 12

④ pro 4 vrcholy:

K_4 ohodnocené délkami nejkr. cest

⑤ najde se eulerovský tah v multigrafu vzniklém přidáním hran nejkratší cesty

1 9-10:01



1 9-10:15

Příklad 11. *Rozhodněte, zda plocha daná v okolí* $[1,0,1] \in E_3$ *rovnicí* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ *leží v bodě* $[1,0,1]$ *nad nebo pod*

$$z = z(x,y)$$

$$z'_x: \quad 3x^2 + 3z^2 \cdot z'_x - 3y \cdot z - 3yx z'_x - 1 - z'_x = 0$$

$$[1,0,1]: \quad 3 + 3 \cdot z'_x - 1 - z'_x = 0$$

$$2z'_x = -2$$

$$z'_x = -1$$

$$Hz(1,0,1) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$

1 9-10:19

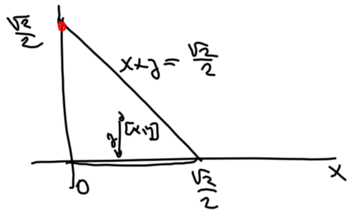
hustota „přímo úměrná vzdál. od počátku":

$$\rho(x,y) = k \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

(lze předp. $k=1$ nebo cokoliv vhodného) (konstanta)

1 9-10:24

Příklad 132. *Máme destičku ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protějším vrcholu je rovna 2. Najděte těžiště destičky.*



hustota ...vzd. od x

$$\rho(x,y) = y \cdot k, \text{ kde } \rho\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$$

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot k = 2$$

$$k = \tfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

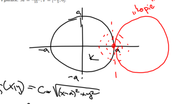
Odtud $\rho(x,y) = 2\sqrt{2} \cdot y$

1 9-10:27

Příklad 135. *Určete souřadnice těžiště T kruhové destičky* $x^2+y^2 \le a^2$*, kde* $a>0$*, je-li její hustota v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od bodu* $[a,0]$ *(pro výpočet můžeme vzít hustotu rovnu c krát zmíněná vzdálenost).*

Nápověda. Užijte transformaci $x-a = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, tj. polární souřadnice se středem $[a,0]$.

Výsledek. $M = \frac{32a^3c}{15}, T = [-\frac{a}{5}, 0]$.



$$\rho(x,y) = c \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$M = \iint_K c\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,dx\,dy$$

transf. $x - a = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ Jacobián: $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

meze: $x^2+y^2 \le a^2$

$$(a + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le a^2$$

$$a^2 + 2ar\cos\varphi + \underbrace{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}_{r^2} \le a^2$$

$$2ar\cos\varphi + r^2 \le 0 \quad |:r$$

$$2a\cos\varphi + r \le 0$$

$$r \le -2a\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} c \int_0^{-2a\cos\varphi} r \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} c\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{-2a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= c\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-8a^3\cos^3\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \frac{-8a^3c}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{8a^3c}{3}\left[\frac{1}{12}\sin 3\varphi + \frac{3}{4}\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= -\frac{8a^3c}{3}\left[\frac{1}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{12} - \frac{3}{4}\right] = \frac{32a^3c}{15}$$

1 9-10:32

4. (5 bodů) Určete kolika způsoby je možné naplnit tašku n kusy uvedených druhů ovoce, přičemž jednotlivé kusy téhož druhu nerozlišujeme, nemusí být využity všechny druhy a navíc:

- jablek musí být libovolný počet,
- banánů musí být sudý počet,
- hrušek musí být násobek 4,
- pomeranče mohou být nejvýše 3 a
- avokádo může být pouze jedno (nebo žádné),
- rajče je zelenina, která do tašky (pouze pro účely této úlohy) nepatří.

(*Nápověda: vytvořující funkce*)

$$(x^0+x^1+x^2+\dots)(x^0+x^2+x^3+\dots)(x^0+x^4+\dots)\cdot$$
$$(x^0+x^1+x^2+x^3)(x^0+x^1)=$$
$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{\cancel{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{1-x^4}}\cdot\frac{\cancel{1-x^4}}{1-x}\cdot\frac{\cancel{1-x^2}}{1-x}=$$
$$=(1-x)^{-3}$$ = rozvinout do mocninné řady a zjistit koef. u x^n.

1 9-10:52

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$
$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi \Rightarrow \cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$
$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi$$
$$\|$$
$$\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$$
$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi=$$
$$=\cos^3\varphi-3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)=$$
$$=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$$
$$\Rightarrow \cos^3\varphi=\frac{1}{4}(\cos 3\varphi+3\cos\varphi)$$
$$\Rightarrow \int\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\sin 3\varphi+3\sin\varphi\right)$$

1 9-10:44