Matematika III – 10. přednáška
Eulerovské grafy a Hamiltonovské kružnice, stromy, rovinné grafy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

21. 11. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, `https://is.muni.cz/auth/el/1433/podzim2012/MA010/index.qwarp`

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, `https://is.muni.cz/auth/el/1433/podzim2012/MA010/index.qwarp`
- Donald E. Knuth, The Stanford GraphBase, ACM, New York, 1993 (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/sgb.html`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, `https://is.muni.cz/auth/el/1433/podzim2012/MA010/index.qwarp`
- Donald E. Knuth, The Stanford GraphBase, ACM, New York, 1993 (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/sgb.html`).

Plán přednášky

Grafy jedním tahem

Jistě se každý setkal s dětskou hříčkou

Nakresli obrázek jedním tahem.

V řeči grafů to znamená *najděte sled, který projde všechny hrany právě jednou a každý vrchol alespoň jednou.*

Grafy jedním tahem

Jistě se každý setkal s dětskou hříčkou

Nakresli obrázek jedním tahem.

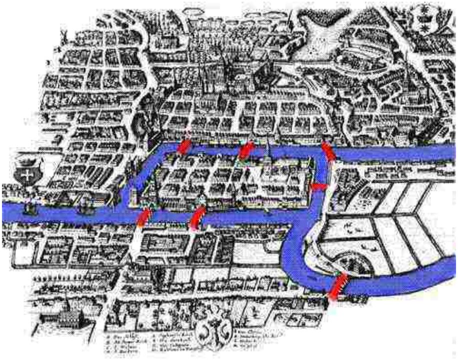
V řeči grafů to znamená *najděte sled, který projde všechny hrany právě jednou a každý vrchol alespoň jednou.*

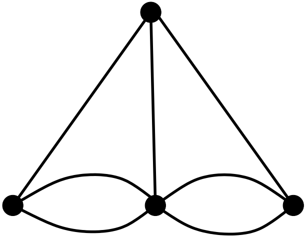
Definice

Sled, který prochází právě jednou všemi hranami a začíná a končí v jednom vrcholu, se nazývá **uzavřený eulerovský tah**.
Grafům, které takový sled připouští říkáme **eulerovské**.
Hovoříme rovněž o (neuzavřeném) eulerovském tahu, kde vypouštíme požadavek na stejný výchozí a cílový vrchol.

Terminologie odkazuje na klasický příběh o sedmi mostech ve městě Královec (Königsberg, tj. Kaliningrad), které se měly projít na procházce každý právě jednou a důkaz nemožnosti takové procházky od Leonharda Eulera z roku 1736.

Terminologie odkazuje na klasický příběh o sedmi mostech ve městě Královec (Königsberg, tj. Kaliningrad), které se měly projít na procházce každý právě jednou a důkaz nemožnosti takové procházky od Leonharda Eulera z roku 1736.
Situace je znázorněna na obrázku. Nalevo dobová mapa, napravo odpovídající (multi)graf. Vrcholy tohoto grafu odpovídají „souvislé pevnině“, hrany mostům.





Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důkaz.

Podmínka je zřejmě nutná.

Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důkaz.

Podmínka je zřejmě nutná.
Dostatečnost podmínky se ukáže sporem uvážením tahu v G maximální možné délky. □

Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důkaz.

Podmínka je zřejmě nutná.
Dostatečnost podmínky se ukáže sporem uvážením tahu v G maximální možné délky. □

Důsledek

Graf lze nakreslit jedním tahem právě tehdy, když má všechny stupně vrcholů sudé nebo když existují právě dva vrcholy se stupněm lichým.

Příklad

1. Určete nejmenší počet mostů, které je třeba v Královci přistavět, aby byl graf eulerovský.
2. Jaká je situace v Kaliningradu nyní (od dob Eulerových doznalo zejména působením válek město mnoho změn)? Byl by dnes schopen Euler svoji procházku realizovat?

Eulerovské orientované grafy

Definice

Orientovaný graf (V, E) nazveme *eulerovský*, jestliže v něm existuje uzavřený orientovaný tah, který obsahuje každou hranu právě jednou a každý vrchol aspoň jednou.

Orientované eulerovské grafy lze rovněž velmi dobře charakterizovat. K tomu ovšem potřebujeme některé nové pojmy.

Definice

Orientovaný graf nazveme *vyvážený*, jestliže pro každý jeho vrchol v platí $\deg_+(v) = \deg_-(v)$.
Symetrizací orientovaného grafu (V, E) nazýváme neorientovaný graf $(V, \overline{E})$, kde

$$\overline{E} = \{\{x, y\}; (x, y) \in E \,\mathrm{nebo}\, (y, x) \in E\}.$$

Věta

Orientovaný graf G je eulerovský právě když je vyvážený a jeho symetrizace je souvislý graf (tj. graf G je slabě souvislý).

Důkaz.

Analogický jako v neorientovaném případě. $\square$

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, ...).

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).
Zřejmě je v případě, že graf G je eulerovský, nejkratším takovým sledem příslušný eulerovský tah.

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, ...).

Zřejmě je v případě, že graf G je eulerovský, nejkratším takovým sledem příslušný eulerovský tah.

V opačném případě nutně graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně. Tento graf je třeba přidáváním hran doplnit na eulerovský (multi)graf (později ukážeme, že v případě stromů to znamená nutnost zdvojení všech hran). Snadno lze ukázat, že to lze udělat v polynomiálním čase jak v orientovaném, tak neorientovaném případě, v případě multigrafů je to však problém **NP-úplný**.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici. Zatímco (zdánlivě podobně složitý) problém nalezení eulerovského tahu je triviální, zjistit, zda je daný graf hamiltonovský, je **NP-úplný problém**.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici.
Zatímco (zdánlivě podobně složitý) problém nalezení eulerovského tahu je triviální, zjistit, zda je daný graf hamiltonovský, je **NP-úplný problém**.
V praxi je ovšem problém nalezení hamiltonovské kružnice (či jeho modifikace – např. problém obchodního cestujícího) podstatou mnoha problémů v logistice, je proto často žádoucí nalezení i suboptimálního řešení (v případě problému obchodního cestujícího).

Příklad (Icosian Game – William Rovan Hamilton)

Nalezněte hamiltonovskou kružnici v grafu tvořeném vrcholy a hranami pravidelného dodekaedru (dvanáctistěnu) – viz `http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200201hamilton.jpg`

Příklad

Existuje hamiltonovská kružnice v Petersenově grafu?

Příklad (Icosian Game – William Rovan Hamilton)

Nalezněte hamiltonovskou kružnici v grafu tvořeném vrcholy a hranami pravidelného dodekaedru (dvanáctistěnu) – viz `http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200201hamilton.jpg`

Příklad

Existuje hamiltonovská kružnice v Petersenově grafu?

Řešení

Neexistuje (přitom ale po odebrání libovolného vrcholu již graf hamiltonovský bude). Ukáže se to např. tak, že se popíší všechny 3-regulární grafy na 10 vrcholech, které jsou hamiltonovské a v každém se nalezne kružnice kratší než 5.

Věta (Dirac (1952))

Má-li v grafu G s $n \geq 3$ vrcholy každý vrchol stupeň alespoň $n/2$, je G hamiltonovský.

Věta (Ore (1960))

Má-li v grafu G s $n \geq 4$ vrcholy každá dvojice nesousedních vrcholů součet stupňů alespoň n, je G hamiltonovský.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Je vidět, že Oreho (a tedy i Diracova) věta je triviálním důsledkem této věty.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Je vidět, že Oreho (a tedy i Diracova) věta je triviálním důsledkem této věty.

Důkaz.

Zřejmě stačí dokázat, že pokud je G hamiltonovský po přidání hrany $\{u, v\}$ takové, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, pak je hamiltonovský i bez této hrany. Předpokládejme, že $G + uv$ je hamiltonovský a G nikoliv. Pak existuje hamiltonovská cesta v G z u do v. Pro každý vrchol sousedící s u platí, že jeho předchůdce na této cestě nemůže sousedit s v (jinak bychom měli hamiltonovskou kružnici v G). Tedy $\deg(u) + \deg(v) \leq n - 1$. □

Plán přednášky

Stromy

Definice

Souvislý graf neobsahující kružnici, se nazývá **strom**. Obecně v grafech nazýváme vrcholy stupně jedna **listy** (případně také **koncové vrcholy**). Graf neobsahující kružnice nazýváme **les**.

Tato definice nicméně není úplně nejvhodnější pro praktickou kontrolu – uvedeme proto za chvíli hned 5 ekvivalentních definic. Následující lemma ukazuje, že každý strom lze vybudovat postupně z jediného vrcholu přidáváním listů:

Stromy

Definice

Souvislý graf neobsahující kružnici, se nazývá **strom**. Obecně v grafech nazýváme vrcholy stupně jedna **listy** (případně také **koncové vrcholy**). Graf neobsahující kružnice nazýváme **les**.

Tato definice nicméně není úplně nejvhodnější pro praktickou kontrolu – uvedeme proto za chvíli hned 5 ekvivalentních definic. Následující lemma ukazuje, že každý strom lze vybudovat postupně z jediného vrcholu přidáváním listů:

Lemma

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy. Pro libovolný graf G s listem v jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- *G je strom;*
- *$G \setminus \{v\}$ je strom.*

Charakterizace stromů

Věta

Pro každý graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. *G je strom;*
2. *pro každé dva vrcholy v, w grafu G existuje právě jedna cesta z v do w;*
3. *graf G je souvislý, ale vyjmutím libovolné hrany vznikne nesouvislý graf*
4. *graf G neobsahuje kružnici, každým přidáním hrany do grafu G však již kružnice vznikne*
5. *G je souvislý graf a mezi velikostí množin jeho vrcholů a hran platí vztah (Eulerův vzorec) $|V| = |E| + 1$.*

Důkaz jednotlivých implikací obvykle vedeme indukcí podle počtu vrcholů s využitím lemmatu o výstavbě stromů.