Matematika III – 6. přednáška
Speciální optimalizační metody, lineární programování, integrace funkcí více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24. 10. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.
- Emil Vitásek, Numerické metody, SNTL, 1987.

Plán přednášky

Speciální optimalizační metody

Zmiňme se jen ve stručnosti o speciálních optimalizačních technikách, které se v dnešní praxi používají. Zájemce o bližší seznámení s nimi můžeme odkázat na další předměty MU, např.:

- Optimalizace – `PřF: M0160` (jaro)
- Optimalizace – `PV027` (jaro)
- Lineární programování – `PřF: M4110` (jaro)
- Matematické programování – `PřF: M5170` (podzim)

Metoda gradientu

Již dříve jsme zmínili, že funkce nejrychleji roste ve směru gradientu (a nejrychleji klesá ve směru opačném) – proto je přirozené se při hledání maxima vydat z daného bodu ve směru gradientu (analogie *chození do kopce nejprudším svahem*). Otázka je, jak dlouho „jít“ a jak často gradient počítat (podrobněji viz např. `http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent`).
Iterace:

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n \operatorname{grad} f(x_n),$$

pro dostatečně malé γ_n, aby $f(x_{n+1}) > f(x_n)$.

Metoda gradientu

Již dříve jsme zmínili, že funkce nejrychleji roste ve směru gradientu (a nejrychleji klesá ve směru opačném) – proto je přirozené se při hledání maxima vydat z daného bodu ve směru gradientu (analogie *chození do kopce nejprudším svahem*). Otázka je, jak dlouho „jít" a jak často gradient počítat (podrobněji viz např. `http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent`).
Iterace:

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n \operatorname{grad} f(x_n),$$

pro dostatečně malé γ_n, aby $f(x_{n+1}) > f(x_n)$.
Problémy:

- náročný opakovaný výpočet γ,
- velký počet iterací v případě velmi různorodé křivosti v různých směrech; např *Rosenbrockova banánová funkce* – $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$.

Newtonova optimalizační metoda

Newtonova metoda je dobře známý numerický postup pro nalezení kořenů dané reálné funkce f . Známe-li bod x_0 „rozumně“ blízko kořene, zkonstruujeme v bodě $[x_0, f(x_0)]$ tečnu ke grafu funkce f a za bod x_1 zvolíme průsečík tečny s osou x. Tento postup opakujeme. Snadno je vidět, že platí rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Newtonova optimalizační metoda

Newtonova metoda je dobře známý numerický postup pro nalezení kořenů dané reálné funkce f. Známe-li bod x_0 „rozumně“ blízko kořene, zkonstruujeme v bodě $[x_0, f(x_0)]$ tečnu ke grafu funkce f a za bod x_1 zvolíme průsečík tečny s osou x. Tento postup opakujeme. Snadno je vidět, že platí rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tento postup např. poskytuje efektivní postup pro výpočet $\sqrt{2}$ (nebo obecněji $\sqrt{d}$) s libovolnou přesností; pokud bychom ale chtěli hledat řešení rovnice $x^{1/3} = 0$, tak snadno vidíme, že metoda diverguje, ať začneme jakkoli blízko 0.

Při hledání extrémů funkcí (i více proměnných) může být Newtona metoda využita pro nalezení stacionárních bodů – v nich musí být derivace nulová, proto jde vlastně o nalezení kořenů derivace iterativním postupem

$$x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1} \cdot \operatorname{grad} f(x_n).$$

Při hledání extrémů funkcí (i více proměnných) může být Newtona metoda využita pro nalezení stacionárních bodů – v nich musí být derivace nulová, proto jde vlastně o nalezení kořenů derivace iterativním postupem

$$x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1} \cdot \operatorname{grad} f(x_n).$$

Výpočet inverze Hessiánu je časově náročná operace, proto se často místo toho využívá

- metoda sdružených gradientů pro řešení příslušné soustavy,
- různých tzv. *kvazi*-newtonovských metod, využívajících pouze přibližného Hessiánu (např. BFGS) – viz např. `http://demonstrations.wolfram.com/MinimizingTheRosenbrockFunction/`

Plán přednášky

Lineární programování

Úloha lineárního programování

Pro daná $c \in \mathbb{R}^n$ řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

Lineární programování

Úloha lineárního programování

Pro daná $c \in \mathbb{R}^n$ řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

za daných (lineárních) omezení

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x &\leq b_1 \\ &\cdots \\ a_k \cdot x &\leq b_k \\ a_{k+1} \cdot x &= b_{k+1} \\ &\cdots \\ a_\ell \cdot x &= b_\ell \end{aligned}$$

Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat} \quad f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$
$$\ldots$$
$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat} \qquad f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$
$$\dots$$
$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.
Převody:

- minimalizace $c \cdot x$ $\rightarrow$ maximalizace $(-c) \cdot x$
- nerovnice $\leftrightarrow$ rovnice (doplňková proměnná, resp. nahrazení rovnice dvojicí nerovnic)
- reálná proměnná x $\rightarrow$ nezáporné proměnné (substituce $x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$).

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.
V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrému.

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.
V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrémů.

Příklad

Maximalizujte hodnotu $x+y$ za podmínek

$$4x - y \leq 8$$
$$2x + y \leq 10$$
$$5x - 2y \geq -2$$
$$x, y \geq 0$$

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).
Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru, tj. mnohostěnu, na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).
Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru, tj. mnohostěnu, na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.
Sice je ukázán příklad podmínek, kdy simplexová metoda projde nešikovně všech 2^n vrcholů (jde o příklad zborcené n-rozměrné krychle), a tedy metoda je v nejhorším případě exponenciální, ale v praxi je obvykle pozoruhodně úspěšná (kolem roku 2000 bylo dokázáno, že očekávaný čas běhu na náhodném vstupu je polynomiální).

Příklad

Maximalizujte $f = 2x - 3y + 4z$ za podmínek

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &\leq 3 \\ x + y + z &\leq 10 \\ 2x + y - z &\leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení

Převedeme úlohu z kanonického do *standardního* tvaru – k tomu stačí zavést doplňkové proměnné u, v, w. Maximalizujeme

$$\begin{array}{ccccccc} 4x - 3y & +z + u & & & = 3 \\ x + y & +z & +v & & = 10 \\ 2x + y & -z & & + w & = 10 \\ \hline -2x + 3y & -4z & & & +f = 0 \end{array}$$

Řešení (pokračování)

Úlohu přepíšeme do tzv. *simplexové tabulky*.

	x	y	z	u	v	w	
u	4	-3	1	1	0	0	3
v	1	1	1	0	1	0	10
w	2	1	-1	0	0	1	10
f	-2	3	-4	0	0	0	0

V posledním řádku odpovídajícím účelové funkci najdeme **některou zápornou hodnotu** (*heuristika: největší v abs. hodnotě*), což odpovídá tomu, že se snažíme postupovat po hraně *ve směru* proměnné odpovídající příslušnému sloupci. Krajní vrchol této hrany najdeme tak, že najdeme minimum z podílů $3/1, 10/1$ absolutních členů a **kladných** koeficientů u proměnné, v jejímž směru se snažíme postupovat. Zde půjde o sloupec proměnné z a eliminovat budeme pomocí 1. řádku ("pivot"je 1) – řádek označíme stejně jako dotyčný sloupec (*proměnná přejde do báze*).

Řešení (pokračování)

	x	y	z	u	v	w	
z	4	−3	1	1	0	0	3
v	−3	4	0	−1	1	0	7
w	6	−2	0	1	0	1	13
f	14	−9	0	4	0	0	12

Nyní máme jediný záporný prvek v posledním řádku (sloupec y) a v něm jediný kladný prvek, proto pivotujeme podle 4 ve 2. řádku.

Řešení (dokončení)

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x & y & z & u & v & w & \\
z & \frac{7}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{33}{4} \\
y & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\
w & \frac{9}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{33}{2} \\
\hline
f & \frac{29}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & 1 & \frac{111}{4}
\end{array}
$$

Nyní již máme všechny prvky v posledním řádku kladné, dosáhli jsme tedy maxima

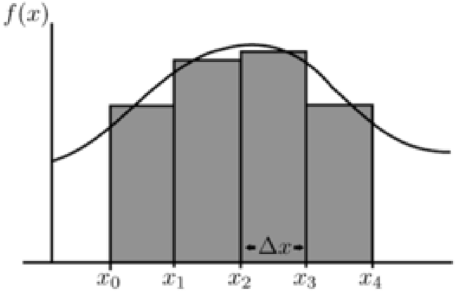
$$f = \frac{111}{4}$$

pro $z = \frac{33}{4}$, $y = \frac{7}{4}$ a $w = \frac{33}{2}$. Původní proměnná x je nyní nebazická (x není uvedeno jako označení žádného řádku nebo ekvivalentně: sloupec x není eliminovaný), což odpovídá $x = 0$.

Plán přednášky

Připomenutí: Riemannův integrál

Motivace: výpočet plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na uzavřeném intervalu.
Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedné proměnné ohraničená na uzavřeném intervalu $[a, b]$).



Připomenutí: Riemannův integrál

Zvolíme dělení $D = \{x_1 = a, \dots, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).

Připomenutí: Riemannův integrál

Zvolíme dělení $D = \{x_1 = a, \ldots, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).
Je-li *norma dělení* (tj. maximum z délek intervalů $[x_i, x_{i+1}]$) *malá*, pak výše uvedená suma je velmi blízko zmíněné ploše (přesněji pomocí nulové posloupnosti dělení a limit).

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$,

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,
- povrch pláště rotačního tělesa $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ ve zbývajících n proměnných.

Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \dots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \dots, y_n)$ ve zbývajících n proměnných.

Věta (O záměně derivace a integrálu)

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \dots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[\alpha, \beta]$ a na nějakém okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n] \in E_n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \dots, y_n) = \int_\alpha^\beta f(x, y_1, \dots, y_n)dx.$$

Potom platí pro všechny indexy $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \dots, a_n)dx.$$

Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných.
Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části obsahu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných.
Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části obsahu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.
Co jsou obory integrace?
Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.
Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.
Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_{i,\dots,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times \dots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\dots,j} f(\xi_{i,\dots,j})(x_{i+1} - x_i)\dots(z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \dots, z) dx \dots dz$$

Pro všechny spojité funkce f lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Pro všechny spojité funkce f lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Definice

Omezenou množinu $S \subset E_n$ označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\chi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\chi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Věta

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset E_n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \; dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.

Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \; dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.

Řešení

Za nulovou posloupnost dělení uvážíme posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$, kde n-té dělení dostaneme pomocí přímek $x = i/n, y = j/n$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, přičemž hodnoty $\xi_{i,j}$ budeme vybírat z pravých horních rohů dělících čtverečků.

Řešení (dokončení)

Pak

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le i,j<n} \frac{(i+1)}{n}\frac{(j+1)}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{1\le i,j\le n} ij =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{1\le i\le n} i\right)\left(\sum_{1\le j\le n} j\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$