Matematika III **A** Jméno:
12. ledna 2011 (UČO:)

Semestr	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně semestru) je 20 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Příklady:

1. (5 bodů) Uvažte funkci $f(x,y) = x^2y^2 - x$.

(a) Zapište diferenciál $\mathrm{d}f$ (jako funkci $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$) v bodě $[2,1]$.

(b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[2,1,?]$.

(c) Pomocí lineární aproximace odhadněte hodnotu $f(1{,}9; 1{,}1)$.

(d) Určete směrovou derivaci f v bodě $[2,1]$ ve směru vektoru $(-1,1)$.

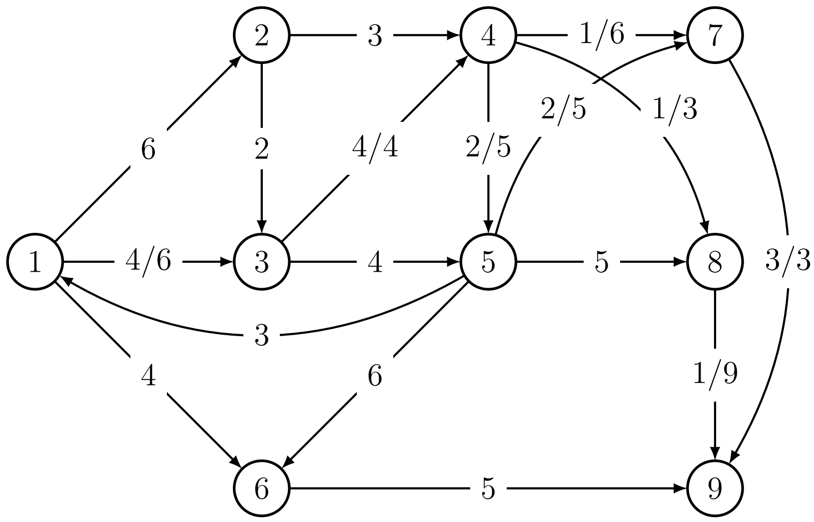
(e) Uveďte příklad funkce $g(x,y)$ spojité na $\mathbb{R}^2$ takové, že funkce $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ není v bodě $[2,1]$ spojitá (nebo dokažte, že neexistuje).

2. (6 bodů)

(a) Určete hmotnost tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $1 < x^2 + y^2 < 9$ ležící v horní polorovině ($y \geq 0$), je-li hustota $\rho = \frac{y}{x^2+y^2}$.

(b) Určete souřadnice těžiště tohoto tělesa.

3. (5 bodů) Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu (prohledávání do hloubky, vrcholy volte vzestupně podle čísel) nalezněte maximální tok v síti na obrázku se zdrojem 1 a stokem 9 (existující tok a kapacita hrany jsou znázorněny ve tvaru f/c, příp. pouze c, je-li tok aktuálně nulový). Nalezněte minimální řez v této síti. Jednotlivé kroky svého postupu podrobně zapiště (důsledně v pořadí, v jakém je vykonáváte).



4. (4 body)

(a) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n existuje graf se skóre $1, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 11, n$ (tato posloupnost nemusí být uspořádaná, tj. nemusí být $n \geq 11$).

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) ohodnoceného grafu na třech vrcholech, na němž dá Dijkstrův algoritmus chybný výsledek.

(c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) grafu na 4 vrcholech, který není rovinný.

(d) Určete počet hran úplného grafu na 10 vrcholech.

Matematika III $\boxed{\text{B}}$ **Jméno:**

12. ledna 2011 **(UČO:)**

Semestr	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně semestru) je 20 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Příklady:

1. (5 bodů) Krabice ve tvaru kvádru je umístěna v prvním oktantu ($x, y, z \geq 0$) tak, že jeden vrchol je umístěn v počátku a s ním incidentní stěny leží v souřadných rovinách. Protější vrchol $V = [x, y, z]$ pak musí ležet na paraboloidu $x^2 + y^2 + z = 1$.

   (a) Zapište vztah pro objem $f(x, y)$ kvádru v závislosti na x, y.

   (b) Nalezněte maximum f pro hodnoty x, y, z v přípustném oboru (nezapomeňte zdůvodnit, že jde skutečně o globální maximum).

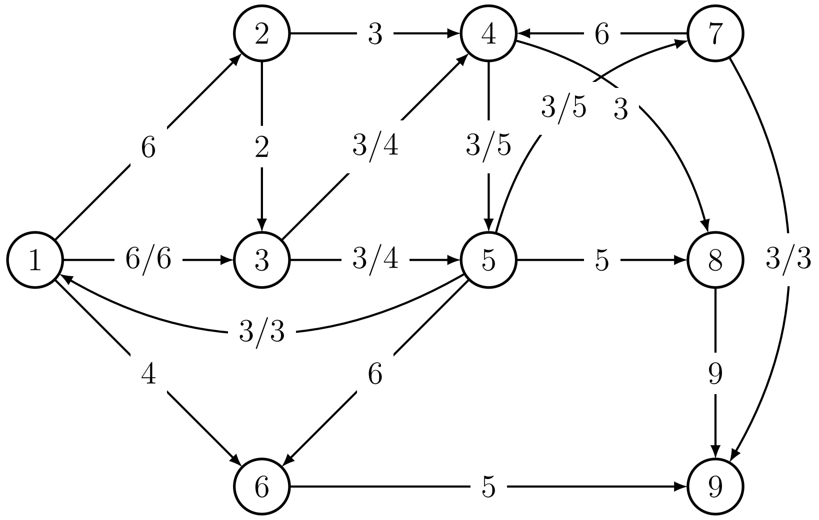
2. (6 bodů) Uvažujte oblast M v 1. kvadrantu omezenou grafy funkcí $y = \frac{x^2}{6}, y = 2x^2, xy = 3$ a $xy = 6$.

   (a) Vypočtěte Jacobián transformace $u = x^2/y, v = xy$ a vyjádřete $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pomocí $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

   (b) Vypočtěte obsah oblasti M pomocí integrace v souřadnicích uv (tedy po výše uvedené transformaci).

   (c) Výsledek z části b) vyjádřete jako linární kombinaci prvků množiny $\{\ln n; n \in \mathbb{N}\}$ s celočíselnými koeficienty.

3. (5 bodů) Pomocí Edmonds-Karpova algoritmu (prohledávání do šířky, vrcholy volte vzestupně podle čísel) nalezněte maximální tok v síti na obrázku se zdrojem 1 a stokem 9 (existující tok a kapacita hrany jsou znázorněny ve tvaru f/c, příp. pouze c, je-li tok aktuálně nulový). Nalezněte minimální řez v této síti. Jednotlivé kroky svého postupu podrobně zapiště (důsledně v pořadí, v jakém je vykonáváte).



4. (4 body)

   (a) Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje graf se skóre $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$.

   (b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) nerovinného grafu, který neobsahuje kružnici.

   (c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) hamiltonovského rovinného grafu, který není eulerovský.

   (d) Určete počet koster úplného grafu na 4 vrcholech.

Matematika III $\boxed{\textbf{C}}$ **Jméno:**

12. ledna 2011 **(UČO:)**

Semestr	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně semestru) je 20 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Příklady:

1. (5 bodů) Uvažte funkci $f(x,y) = \frac{x^2y^2-x}{2y-1}$.

(a) Zapište diferenciál $\mathrm{d}f$ (jako funkci $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$) v bodě $[2,1]$.

(b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[2,1,?]$.

(c) Pomocí lineární aproximace odhadněte hodnotu $f(2{,}1; 0{,}8)$.

(d) Určete směrovou derivaci f v bodě $[2,1]$ ve směru vektoru $(1,-1)$.

(e) Uveďte příklad funkce $g(x,y)$ takové, že funkce $f(x,y) \cdot g(x,y)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ (nebo dokažte, že neexistuje).

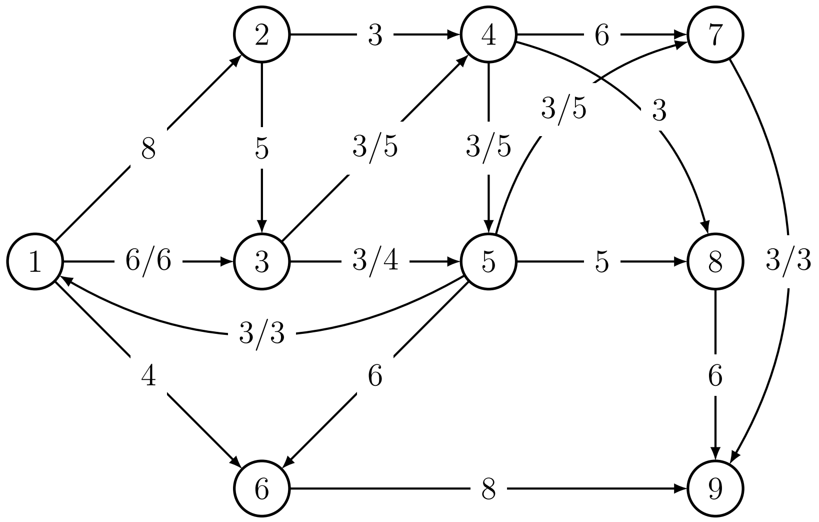
2. (6 bodů) Uvažujte oblast M v 1. kvadrantu omezenou grafy funkcí $y = \frac{x^2}{3}, y = 4x^2, xy = 2$ a $xy = 5$.

(a) Vypočtěte Jacobián transformace $u = x^2/y, v = xy$ a vyjádřete $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pomocí $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

(b) Vypočtěte obsah oblasti M pomocí integrace v souřadnicích uv (tedy po výše uvedené transformaci).

(c) Výsledek z části b) vyjádřete jako linární kombinaci prvků množiny $\{\ln n; n \in \mathbb{N}\}$ s celočíselnými koeficienty.

3. (5 bodů) Pomocí Edmonds-Karpova algoritmu (prohledávání do šířky, vrcholy volte vzestupně podle čísel) nalezněte maximální tok v síti na obrázku se zdrojem 1 a stokem 9 (existující tok a kapacita hrany jsou znázorněny ve tvaru f/c, příp. pouze c, je-li tok aktuálně nulový). Nalezněte minimální řez v této síti. Jednotlivé kroky svého postupu podrobně zapiště (důsledně v pořadí, v jakém je vykonáváte).



4. (4 body)

(a) Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje graf se skóre $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$.

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) souvislého ohodnoceného grafu (hrany ohodnoceny různými přirozenými čísly), takového, že hrana ohodnocená číslem 4 patří do jeho minimální kostry, zatímco hrana ohodnocená číslem 3 tam nepatří.

(c) Dokažte, že K_5 není rovinný (bez použití Kuratowského věty).

(d) Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $K_{n,n-1}$ eulerovský.

Matematika III **D** Jméno:
12. ledna 2011 (UČO:)

Semestr	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně semestru) je 20 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Příklady:

1. (5 bodů) Krabice ve tvaru kvádru je umístěna v prvním oktantu ($x, y, z \geq 0$) tak, že jeden vrchol je umístěn v počátku a s ním incidentní stěny leží v souřadných rovinách. Protější vrchol $V = [x, y, z]$ pak musí ležet na ploše o rovnici $3x^2 + 2y^2 + z = 1$.

(a) Zapište vztah pro objem $f(x, y)$ kvádru v závislosti na x, y.

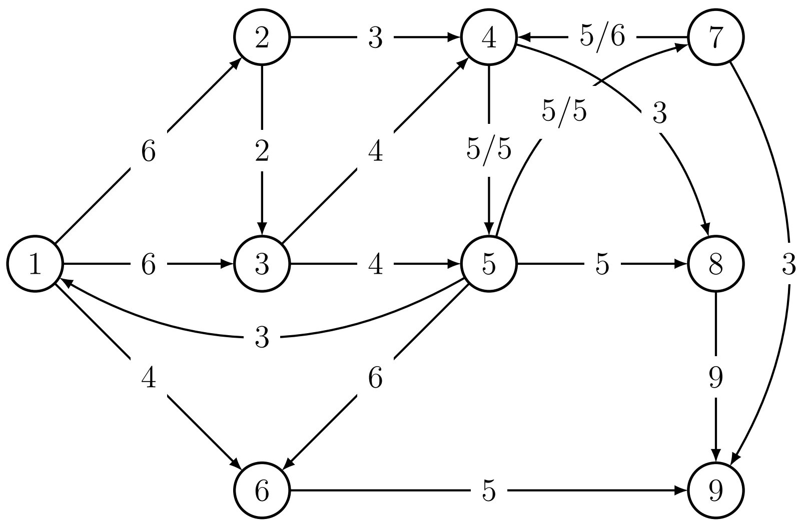
(b) Nalezněte maximum f pro hodnoty x, y, z v přípustném oboru (nezapomeňte zdůvodnit, že jde skutečně o globální maximum).

2. (6 bodů)

(a) Určete hmotnost tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $1 < x^2 + y^2 < 16$ ležící v polorovině $x \geq 0$, je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{x}{x^2+y^2}$.

(b) Určete souřadnice těžiště tohoto tělesa.

3. (5 bodů) Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu (prohledávání do hloubky, vrcholy volte vzestupně podle čísel) nalezněte maximální tok v síti na obrázku se zdrojem 1 a stokem 9 (existující tok a kapacita hrany jsou znázorněny ve tvaru f/c, příp. pouze c, je-li tok aktuálně nulový). Nalezněte minimální řez v této síti. Jednotlivé kroky svého postupu podrobně zapište (důsledně v pořadí, v jakém je vykonáváte).



4. (4 body)

(a) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n existuje graf se skóre $1, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, n$ (tato posloupnost nemusí být uspořádaná, tj. nemusí být $n \geq 11$).

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) ohodnoceného grafu na třech vrcholech, na němž se Dijkstrův algoritmus zacyklí.

(c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) souvislého ohodnoceného grafu (hrany ohodnoceny různými přirozenými čísly), takového, že $|E| \geq |V|$ a že hrana ohodnocená nejvyšším číslem patří do jeho minimální kostry.

(d) Dokažte, že $K_{3,3}$ není rovinný (bez použití Kuratowského věty).