(A) ① $f(x,y) = x^2y^2 - x$

a) $f'_x = 2xy^2 - 1$ $f'_x(2,1) = 3$, $f'_y(2,1) = 8$

$f'_y = 2x^2y$ $df = 3dx + 8dy$

b) tečná rovina v bodě $[2,1,f(2,1)] = [2,1,2]$ je $z - f(x_0,y_0) = f'_x\cdot(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$

$z - 2 = 3(x-2) + 8(y-1)$

c) $f(1{,}9;\ 1{,}1)$ $x_0 = 2,\ y_0 = 1$ $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(dx,dy) =$

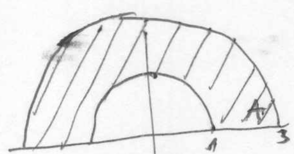
$dx = -0{,}1$

$dy = 0{,}1$ $= 2 + 3\cdot(-0{,}1) + 8\cdot 0{,}1 = 2{,}5$

d) $u = (-1,1)$ $f'_u(2,1) = (3,8)\cdot(-1,1) = 5$

e) např. $g(x,y) = 2y - x$; pak $\dfrac{f}{g} = \dfrac{x^2y^2 - x}{2y - x}$ není v $[2,1]$ spojitá (snadno se ukáže, že tam není limita)

② $\rho(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$



a) $m = \iint\limits_A \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dA$, spočteme pomocí polárních souřadnic – A: $1 \le r \le 3$, $0 \le \varphi \le \pi$

$m = \int_0^{\pi}\int_1^3 \dfrac{r\sin\varphi}{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x^2+y^2 = r^2$

$= \int_0^{\pi}\int_1^3 \sin\varphi\,dr\,d\varphi = 2\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 2\cdot[-\cos\varphi]_0^{\pi} = 4$

b) $T = [T_x, T_y]$, vzhledem k symetrii A i ρ je zřejmě $T_x = 0$

$m\,T_y = \iint\limits_A \rho(x,y)\cdot y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^3 r\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[r^2\right]_1^3 \sin^2\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi =$

$= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = 2\cdot\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi} = 2\pi$

$\Rightarrow T_x = \dfrac{2\pi}{4} = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}}}$ $\Rightarrow T = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

③ Postupné zlepšování (polo)cest:

i) $1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{2} 4 \rightarrow \cancel{X}$
$\xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{8} 9$ rezerva 2

ii) $1 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{2} 5 \xrightarrow{6} 6 \xrightarrow{5} 9$ r. 2

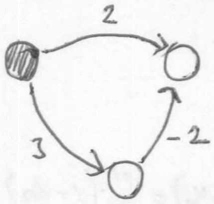
iii) $1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{1} 4 \rightarrow \cancel{3}$
$\xrightarrow{5} 5 \xrightarrow{4} 6 - 9$ r. 1

iv) $1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{2} 9$ r. 2

v) $1 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{5} 5 \rightarrow \cancel{4} \rightarrow \cancel{7}$ r. 4
$\xrightarrow{5} 8 \xrightarrow{6} 9$

Dosažitelné vrcholy zezadu je $\{1,2\} \Rightarrow$ řez je $\{[1,6],[1,3],[2,4],[2,3]\}$ velikosti 15, tedy stejně jako nalezený tok.

(4) a) pro žádné – 12 vrcholů, z nichž stupeň 2 je 11 (nejvyšší možný) a jednoho 1 – nelze.

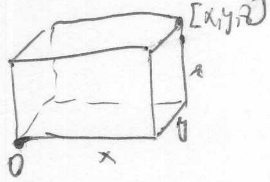
b) 

c) neexistuje díky Kuratowského větě

d) $\binom{10}{2} = 45$

③ MB103-2019-TZ1

① $x^2+y^2+z=1$

a) 

$f(x,y,z) = xyz = xy(1-x^2-y^2) = xy - x^3y - xy^3$ $\qquad x,y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 1$

b) stac. body (uvnitř) $0 = f'_x = y - 3x^2y - y^3$

$0 = f'_y = x - x^3 - 3xy^2$

i) $x=0 \Rightarrow y = y^3 \Rightarrow y \in \{0, \pm 1\}$

ii) $y=0 \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x \in \{0, \pm 1\}$ $\Big\}$ všechny násobky leží na hranici, kde je $f=0$.

iii) $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow \begin{rcases} 0 = 1 - x^2 - 3y^2 \\ 0 = 1 - 3x^2 - y^2 \end{rcases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2+3y^2 = 1 \\ 3x^2+y^2=1 \end{matrix} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{4}$,

$\Rightarrow$ v příp. oblasti je jediný stacionární bod $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$f''_{xx} = -6xy$, $f''_{xy} = 1 - 3x^2 - 3y^2$, $f''_{yy} = -6xy$

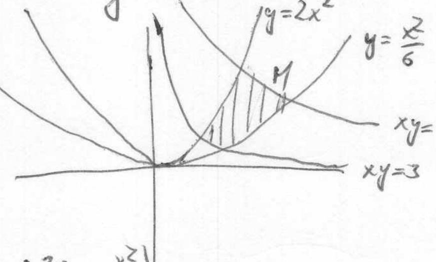
$\Rightarrow Hf\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{6}{4} \end{pmatrix}$, $\det(Hf) = 2$, $-\frac{6}{4} < 0 \Rightarrow Hf$ je neg. def. $\Rightarrow$ lokální maximum

Zřejmě jde i o globální maximum.

②

$G: u = \frac{x^2}{y}$

$v = xy$



a) $D^1G = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ y & x \end{pmatrix}$ $\qquad \det D^1G = \frac{2x^2}{y} + \frac{x^2}{y} = \frac{3x^2}{y} = 3u$

$$dx\,dy = \frac{1}{3u}\,du\,dv$$

b) $\iint_M dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{6}\int_3^6 \frac{1}{3u}\,dv\,du = \int_{1/2}^{6} \frac{1}{3u}\cdot\left[v\right]_3^6 du = \int_{1/2}^{6} \frac{1}{u}\,du = \left[\ln|u|\right]_{1/2}^{6} =$

$\frac{1}{2} \leq u = \frac{x^2}{y} \leq 6$

$3 \leq v = xy \leq 6$

$= \ln 6 - \ln\frac{1}{2} = 2\ln 2 + \ln 3$

③ Postupně hledáme zlepšující (polo)cesty od nejkratších (podle počtu hran)

2 hrany: $1 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{5} 9$ rezerva 4

3 hrany: $1 \xleftarrow{3} 5 \xrightarrow{6} 6 \xrightarrow{1} 9$ r. 1

$1 \xleftarrow{2} 5 \xrightarrow{5} 8 \xrightarrow{9} 9$ r. 2

4 hrany: $1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{3} 8 \xrightarrow{7} 9$ r. 3

5 hran: $1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{3} 8 \xrightarrow{4} 9$ r. 1

6 hran: $1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 5 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{3} 9$ r. 1

Ze zdroje dosažitelné vrcholy $\{1,2\}$ $\Rightarrow$ min. řez je $\{[1,6],[1,3],[2,4],[2,3]\}$ velikosti 15.

4

a) neexistuje – je-li n vrcholů, pak nemůže mít jeden stupeň 0 a jeden stupeň $n-1$
(případně lze připustit odpověď $n=1$)

b) každý ~~st~~ les je rovinný ⇒ neexistuje

c) např. 

d) $4^{4-2} = 16$

(C)

① $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 - x}{2y-1}$

a) $f'_x = \dfrac{2xy^2-1}{2y-1}$ $f'_x(2,1) = 3$

$f'_y = \dfrac{2x^2y(2y-1) - 2(x^2y^2-x)}{(2y-1)^2}$ $f'_y(2,1) = \dfrac{8-4}{1^2} = 4$

$df = 3dx + 4dy$

b) tečná rovina v $[2,1,2]$ je $z - f(x_0,y_0) = f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$

$z - 2 = 3(x-2) + 4(y-1)$

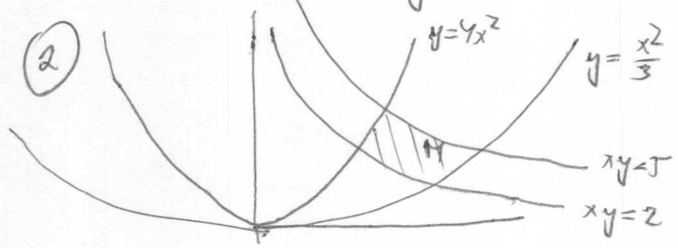
c) $f(2{,}1;\, 0{,}8)$ $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(dx,dy) =$

$= 2 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot(-0{,}2) = 1{,}5$

d) $f'_u(2,1) = (3,4)\cdot(1,-1) = -1$

$u = (1,-1)$

e) např. $g(x,y) = 2y-1$

② 

$G: u = \dfrac{x^2}{y}$, $v = xy$

a) $D'G = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ y & x \end{pmatrix}$ $\det D'G = \dfrac{2x^2}{y} + \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{3x^2}{y} = 3u$

$dx\,dy = \dfrac{1}{3u}\,du\,dv$

b) $\iint_M dx\,dy = \int_{1/4}^{3}\int_{2}^{5} \frac{1}{3u}\,dv\,du = \int_{1/4}^{3} \frac{1}{3u}[v]_2^5\,du = \int_{1/4}^{3}\frac{du}{u} = [\ln|u|]_{1/4}^{3} =$

$\frac{1}{4} \le u = \frac{x^2}{y} \le 3$

$= \ln 3 - \ln\frac{1}{4} = \ln 3 + 2\ln 2$

$2 \le v \le 5$

③ Postupně hledáme zlepšující (polo)cesty od nejkratších (podle počtu hran)

2hrany: $1 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{8} 9$ rezerva 4

3: $1 \xleftarrow{3} 5 \xrightarrow{6} 6 \xrightarrow{4} 9$ r. 3

4: $1 \xrightarrow{8} 2 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{3} 8 \xrightarrow{6} 9$ r. 3

5: $1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{1} 9$ r. 1

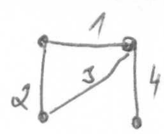
6 hran: $1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{5} 8 \xrightarrow{3} 9$ r. 2

Celkem tok 16.

Ze zdroje jsou dosažitelné vrcholy $\{1,2,3\} \Rightarrow$ řez je $\{\overset{4}{[1,6]}, \overset{4}{[3,5]}, \overset{3}{[2,4]}, \overset{5}{[3,4]}\}$ velikosti 16.

(4) a) pro žádné (ani pro $n=1$) – nemůže existovat vrchol stupně n, je-li $|V|=n$.

b)



c) $|V|=5$, $|E|=\binom{5}{2}=10$ není splněno $|E| \leq 3\cdot|V|-6$

d) pro žádné

(D)

(1) $3x^2+2y^2+z=1$ $\qquad x,y,z \geq 0$

a) $f(x,y,z) = xyz \Rightarrow f(x,y) = \cancel{\ldots}$ $\qquad x,y \geq 0$

$xy(1-3x^2-2y^2)$ $\qquad 3x^2+2y^2 \leq 1$

b) stac. body
$$0 = f'_x = y - 9x^2y - 2y^3$$
$$0 = f'_y = x - 3x^3 - 6xy^2$$

Uvnitř oblasti $(x,y \neq 0)$ je to ekvivalentní s $\begin{matrix} 9x^2+2y^2=1 \\ 3x^2+6y^2=1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x^2 = \frac{1}{12} \\ y^2 = \frac{1}{8} \end{matrix}$

V příp. oblasti je jediný stacionární bod $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$.

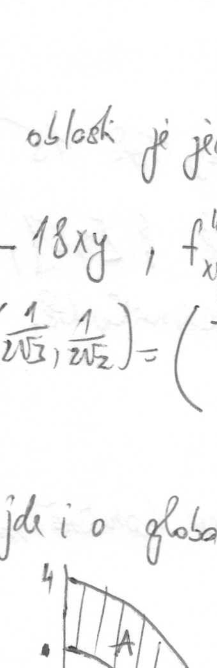
$f''_{xx} = -18xy$, $f''_{xy} = 1 - 9x^2 - 6y^2$, $f''_{yy} = -12xy$

$\Rightarrow Hf\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{18}{4\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{12}{4\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ $\qquad \det Hf = \frac{18 \cdot 12}{16 \cdot 6} - \frac{1}{4} > 0$, $-\frac{18}{4\sqrt{6}} < 0$

$\Rightarrow$ Hf je negativně definitní $\Rightarrow$ lok. maxim.

Zřejmě jde i o globální maximum, protože na hranici je $f \equiv 0$.

(2) $\rho(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$



a) $m = \iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dA$, transf. do polárních souřadnic

$A: \; 1 \leq r \leq 4 \qquad x = r\cos\varphi$

$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \qquad y = r\sin\varphi$

$$m = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^4 \frac{r\cos\varphi}{r^2}\, r\,dr\,d\varphi = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 3[\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \underline{\underline{6}}$$

b) $T = [T_x, T_y]$, vzhledem k symetrii A i ρ (podle osy x) je zřejmě $T_y = 0$.

$$mT_x = \iint_A \rho(x,y)\cdot x\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^4 \frac{r\cos\varphi}{r^2} \cdot r\cos\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^4 r\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^4 d\varphi = \frac{15}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{15}{4}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{15}{4}\cdot\pi \Rightarrow T = \left[\frac{5}{8}\pi, 0\right].$$

(3) $1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{4} 4 \xleftarrow{5} 7 \xleftarrow{5} 5 \xrightarrow{6} 6 \xrightarrow{5} 9$ rezerva 2

$1 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{3} 4 \xleftarrow{2} 3 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{3} 9$ rezerva 2

$1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{1} 4 \xleftarrow{3} 7 \xleftarrow{3} 5 \xleftarrow{} \cancel{8}$

$\xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{1} 9$ rezerva 1

$1 \xrightarrow{1} 2$ X

$1 \xrightarrow{6} 3 \xrightarrow{4} 4 \xleftarrow{2} 7 \xleftarrow{2} 5 \xrightarrow{5} 8 \xrightarrow{9} 9$ rezerva 2

$1 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{3} 8 \xleftarrow{2} 5 \xrightarrow{5} 7 \xrightarrow{3} 9$ rezerva 2

$1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 5 \xleftarrow{5} 4 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{7} 9$ r. 1

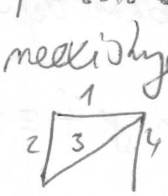
$1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{3} 7 \xrightarrow{1} 9$ r. 1

$1 \xrightarrow{4} 6 \xleftarrow{5} 5 \xrightarrow{5} 8 \xrightarrow{6} 9$ r. 4 $\Rightarrow$ Tok 15

Dosažitelné vrcholy ze zdroje jsou $\{1,2\}$ $\Rightarrow$ řez je $\{[1,6],[1,3],[2,3],[2,4]\}$
velikost 15 $\Rightarrow$ jde o minimální řez a maximální tok.

(4) a) pro žádné

b) neexistuje, Dijkstrův alg. vždy skončí po konečně mnoha krocích.

c) 

d) není splněna podmínka $|E| \le 2|V| - 4$

$9 \not\le 2 \cdot 6 - 4$