Teorie grafů

Matematika III, 8. cvičení

Pojmy k zopakování

- Graf, stupeň vrcholu, kružnice, cesta, cyklický žebřík
- Úplný graf, bipartitní graf, úplný bipartitní graf
- Izomorfismus grafů
- Skóre grafu
- Souvislost grafu, hranová a vrcholová souvislost
- Prohledávání grafu do hloubky, do šířky

Příklad 136. *Určete, kolik hran mají následující grafy:* K_6, $K_{5,6}$, C_8.

Výsledek. K_6 má 15 hran, $K_{5,6}$ má 30 hran, C_8 má 8 hran.

Příklad 137. *Určete, kolik hran musíme přidat do kružnice o n vrcholech, abychom dostali úplný graf.*

Výsledek. $\frac{n(n-1)}{2} - n$

Příklad 138. *Určete, kolik hran musíme přidat do úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$, abychom dostali úplný graf.*

Výsledek. $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - m \cdot n$.

Příklad 139. *Definujme úplný tripartitní graf následovně. Uvažujme tři po dvou disjunktní množiny vrcholů V_1, V_2, V_3. Hranou spojme každé dva vrcholy, pokud neleží oba dva ve V_i pro nějaké $i \in \{1, 2, 3\}$. Pokud $|V_1| = r, |V_2| = s, |V_3| = t$, označme úplný tripartitní graf symbolem $K_{r,s,t}$. Nakreslete $K_{1,2,3}$, $K_{2,2,2}$, $K_{2,3,3}$.*

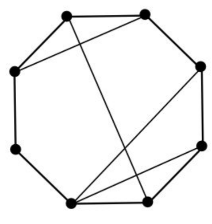
Příklad 140. *Určete, kolik existuje navzájem neizomorfních úplných bipartitních grafů s 1001 hranami.*

Výsledek. 4

Příklad 141. *Určete, kolik vrcholů má cyklický žebřík s 2010 hranami.*

Výsledek. 1340

Příklad 142. *Zadejte následující graf maticí sousednosti.*



Výsledek.

Jeden z možných výsledků:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 143. *Dostanete orientovaný graf reprezentovaný maticí sousednosti A. Určete, jaký graf bude zadávat transponovaná matice této matice.*

Příklad 144. *Dokažte, že součet stupňů všech vrcholů v libovolném jednoduchém grafu je sudý.*

Příklad 145. *Kolik je všech cyklů v grafu K_6?*

Výsledek. $\binom{6}{3} + 3 \cdot \binom{6}{4} + 24\binom{6}{5} + 120\binom{6}{6}$.

Příklad 146. *Dokažte, že v každém jednoduchém grafu o více než jednom vrcholu existuje dvojice vrcholů se stejným stupněm.*

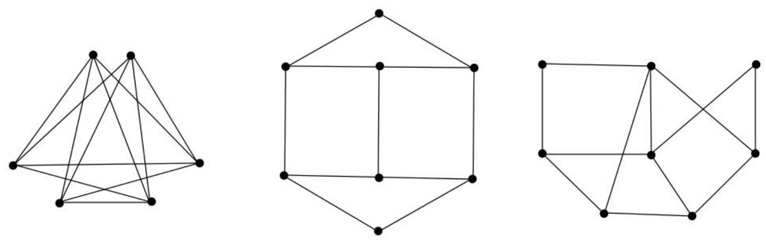
Příklad 147. *Na konferenci se sešlo n matematiků a několik z nich si navzájem potřáslo rukou. Dokažte, že mezi nimi existují dva matematici, kteří si potřásli rukama se stejným počtem lidí.*

Nápověda: Využijte předchozí příklad.

Příklad 148. *Sešlo se 5 lidí. Je možné, že se každý z nich zná s právě třemi ostatními (předpokládejte, že známost je symetrická)?*

Výsledek. Ne

Příklad 149. *Určete, který z následujících grafů je bipartitní. Své tvrzení dokažte.*



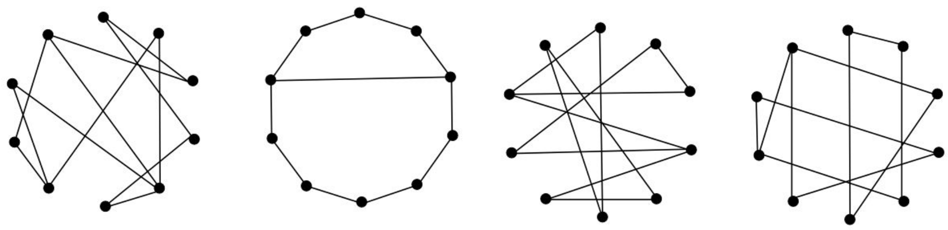
Výsledek. První ne, další dva ano.

Příklad 150. *Uveďte příklad dvou neizomorfních grafů o šesti vrcholech, každý stupně 2.*

Příklad 151. *Dokažte, že neexistují dva neizomorfní grafy o pěti vrcholech, každý stupně 2.*

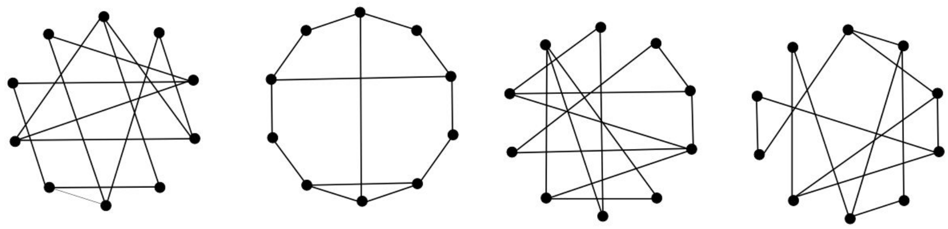
Příklad 152. *Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní, jsou-li izomorfní jejich doplňky.*

Příklad 153. *Určete všechny dvojice izomorfních grafů.*



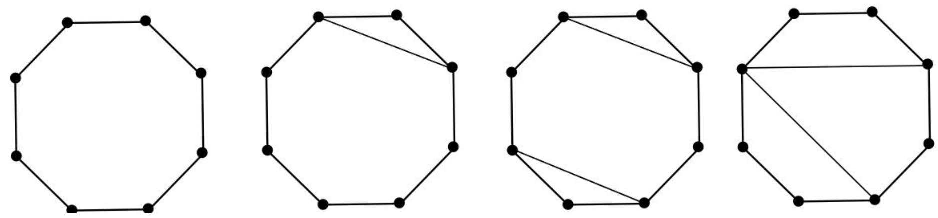
Výsledek. Druhý, třetí a čtvrtý graf jsou navzájem izomorfní.

Příklad 154. *Rozhodněte, které dva z uvedených grafů jsou izomorfní. Daný izomorfismus popište.*



Výsledek. Poslední dva grafy jsou izomorfní

Příklad 155. *Určete, kolik navzájem neizomorfních grafů můžeme dostat přidáním jedné hrany do následujících grafů.*



Výsledek. 3,9,6,16

Příklad 156. *Nakreslete všechny neizomorfní grafy na*

1. *2 vrcholech*
2. *3 vrcholech*
3. *4 vrcholech*
4. *5 vrcholech*

Příklad 157. *Kolik existuje neizomorfních grafů s 6 vrcholy, všemi stupně 3?*

Nápověda: Uvažujte doplňky grafů.

Výsledek. 2

Příklad 158. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje graf se skórem*

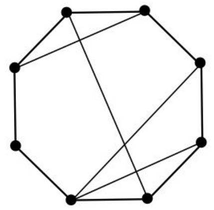
$$(0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots, n, \ldots, n).$$

Příklad 159. *Určete všechna nezáporná celá čísla a pro která existuje graf se skórem*

1. $(1, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 11, a)$

2. $(4, 6, 6, 9, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, a)$

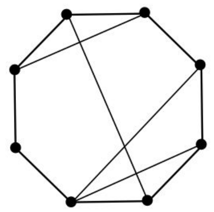
Příklad 160. *Uveďte příklad grafu, který má stejné skóre jako graf na obrázku a přesto není s tímto grafem izomorfní.*



Příklad 161. *Nakreslete všechny navzájem neizomorfní grafy se skórem* $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 6)$.

Výsledek. 2

Příklad 162. *Určete, kolik podgrafů izomorfních* C_3 *obsahuje následující graf.*



Výsledek. 3

Příklad 163. *Určete, kolik podgrafů izomorfních* C_3 *obsahuje graf* K_n.

Výsledek. $\binom{n}{3}$

Příklad 164. *Kolik podgrafů úplného grafu* K_{10} *je izomorfních kružnici* C_4*?*

Výsledek. $3 \cdot \binom{10}{4}$

Příklad 165. *Určete, kolik nejvíce komponent souvislosti může mít graf s 2010 vrcholy, každým stupně 4.*

Výsledek. 402

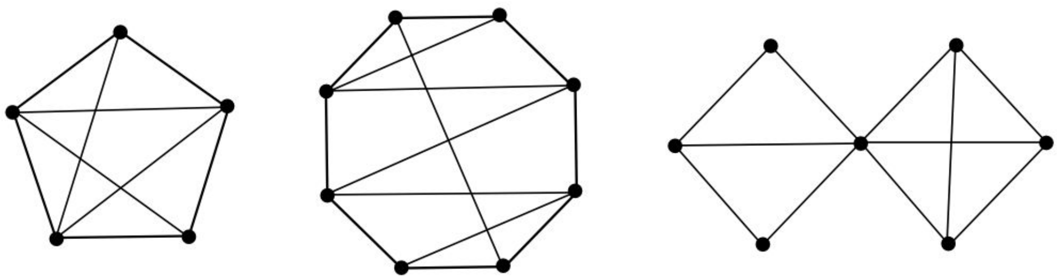
Příklad 166. *Určete, kolik nejméně hran musí mít graf na 12 vrcholech, aby jeho stupeň (vrcholové) souvislosti byl 3.*

Výsledek. 18

Příklad 167. *Určete, kolik nejvíce hran může mít graf na 10 vrcholech, který se skládá ze tří komponent souvislosti.*

Výsledek. 28

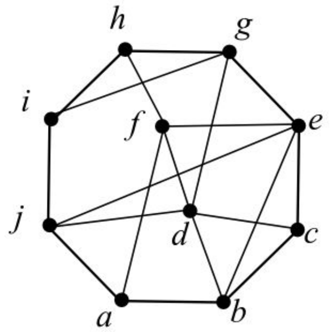
Příklad 168. *Určete vrcholovou i hranovou souvislost následujících grafů:*



Výsledek.

1. 3,3
2. 3,3
3. 1,3

Příklad 169. *Určete, v jakém pořadí vrcholů byste prohledávali tento graf do šířky a v jakém pořadí vrcholů do hloubky, prohledáváte-li z vrcholu a.*



Výsledek.

1. šířka: $a, b, f, j, c, d, e, h, i, g$
2. hloubka: $a, b, c, d, g, e, j, i, h, f$

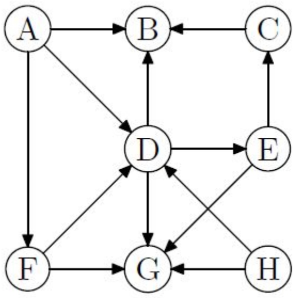
Příklad 170. *Určete, v jakém pořadí vrcholů byste prohledávali tento graf zadaný seznamem následníků do šířky a v jakém pořadí vrcholů do hloubky, prohledáváte-li z vrcholu a.*

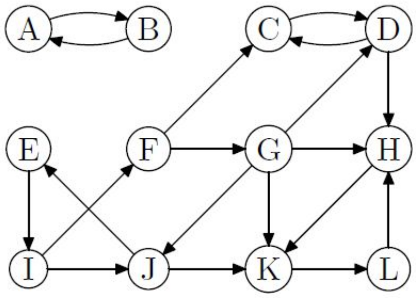
a	b	c	d	
b	a	e	f	g
c	a	g	h	
d	a			
e	b	i		
f	b	i		
g	b	c	h	
h	c	g		
i	e	f		

Výsledek.

1. šířka: $a, b, c, d, e, f, g, h, i$
2. hloubka: a, b, e, i, f, g, c, h

Příklad 171. *Oba orientované grafy na následujících obrázcích projděte pomocí průchodu do hloubky. Pokud si v některém kroku můžete vybrat z několika vrcholů, tak si vždy vyberte ten abecedně nejmenší z nich.*





Výsledek.

1. a, b, d, e, c, g, f, h
2. $a, b, c, d, h, k, l, e, i, f, g, j$