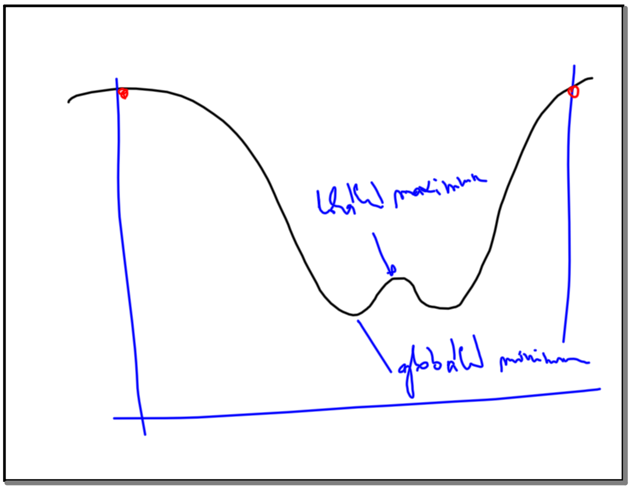
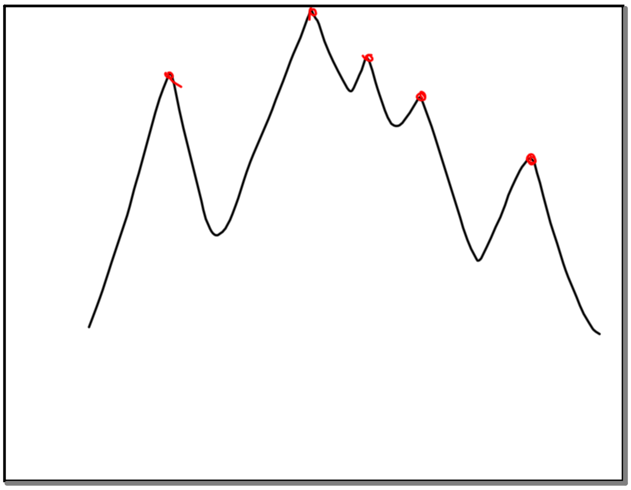


10 10-12:08



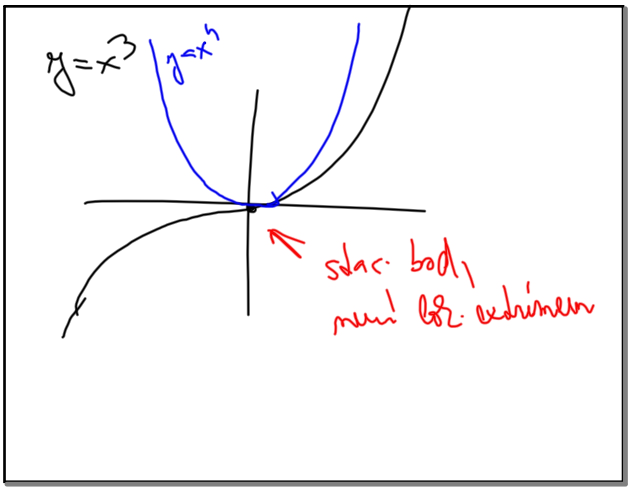
10 10-12:11

$df(x^*): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$v \in \mathbb{R}^n \qquad v \mapsto d_v f(x^*)$

Pokud není nulový, existuje $v \in \mathbb{R}^n$: $d_v f(x^*) \neq 0$

10 10-12:15



10 10-12:21

$h(x,y) = x^2 + xy + y^2 \qquad (x,y)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} =$

$= (x+\frac{y}{2}, \frac{1}{2}x+y)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$= x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{1}{2}xy + y^2$

$= x^2 + xy + y^2$

$g(x,y) = 4x^2 - xy + y$

mce $\begin{pmatrix}4 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

$ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}$

10 10-12:32

$-x^2 - y^2$ neg. def.

$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ hl. minory $-1, +1$

10 10-12:41

Literatura | Extrémy | Zobrazení mezi prostory | Implicitní plochy | Vázané extrémy

Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x,y)=\cos(x)\cos(y),\ \ f_y(x,y)=-\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x)=0$, $\sin(y)=0$, tj. $[x,y]=[\frac{2k+1}{2}\pi,\ell\pi]$, pro libovolné $k,\ell\in\mathbb{Z}$
2. $\cos(y)=0$, $\sin(x)=0$, tj. $[x,y]=[k\pi,\frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k,\ell\in\mathbb{Z}$.

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}-\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y)\\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y)\end{pmatrix}$$

$[x,y]=[\frac{\pi}{2},0]$

ad 1) $Hf(\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$2k\pi$ $2\ell\pi$

$Hf(\frac{\pi}{2},\pi)=\begin{pmatrix}+1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}$ $\quad(-1)^{k+\ell+1}$

ad 2) obecně $Hf(k\pi,\frac{\pi}{2}+\ell\pi)=\begin{pmatrix}0 & -(-1)^k(-1)^\ell\\ -{}'' & 0\end{pmatrix}$

10 10-12:54

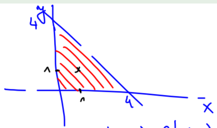
$$(x,y)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=xy$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\qquad = -xy$$

10 10-13:02

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x,y)=xy-x^2-y^2+x+y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x+y-4=0$.



stac. body: $f'_x(x^*)=f'_y(x^*)=0$

$f'_x(x,y)=y-2x+1$

$f'_y(x,y)=x-2y+1$

$y-2x+1=0$ $\qquad -2x+y=-1$

$x-2y+1=0$ $\qquad x-2y=-1$

$-3y=-3$

$y=1$

$\Rightarrow x=1$

stac. bod v M je $[1,1]$

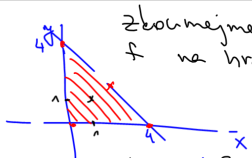
$Hf(1,1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $\quad \det(-2)=-2$, $\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=3$

$\Rightarrow$ negativně def.

$\Rightarrow$ v $[1,1]$ je lokální maxim.

10 10-13:06

zkoumejme chování f na hranici



i) $y=0$ $\quad f(x,0)=-x^2+x$

$x\in\langle 0,4\rangle$ hledáme extrémy fce $g(x)=x-x^2$ na $\langle 0,4\rangle$

$x=\frac{1}{2}$ $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

ii) $x=0$ $\quad f(0,y)=-y^2+y$

$y\in\langle 0,4\rangle$ analogicky

iii) $x+y=4$ $\quad f(x,4-x)=x(4-x)-x^2-(4-x)^2+4$

$x\in\langle 0,4\rangle$ $\quad =4x-2x^2-16+8x-x^2+4$

$=-3x^2+12x-12$

$k(x)=-3x^2+12x-12$

$k'(x)=-6x+12=0 \Leftrightarrow x=2$

kandidáti: $[1,1]$, $[\frac{1}{2},0]$, $[0,\frac{1}{2}]$, $[2,2]$, $[0,0]$, $[4,0]$, $[0,4]$

...a porovnáme fční hodnoty.

10 10-13:13

10 10-13:13