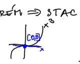
① Určete stacionární body $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy$ a rozhodněte, zda jsou lok. extrémy.

STAC. BOD = bod, ve kterém jsou 1. derivace nulové

EXTRÉM ⇒ STACIONÁRNÍ BOD



$f'_x(x,y) = 2xy + y^2 - y$
$f'_y(x,y) = x^2 + 2xy - x$

$*$ $2xy + y^2 - y = 0$
$x^2 + 2xy - x = 0$ $\Big\}\ \ominus$

$x^2 - y^2 - x + y = 0$
$x^2 - y^2 - (x - y) = 0$
$(x-y)(x+y-1) = 0$

1) $x - y = 0$ 2) $x + y - 1 = 0$

1) $\underline{x = y}$ .... DOSADÍME DO DERIVACE $*$
$2x^2 + x^2 - x = 0$
$3x^2 - x = 0$
$x(3x-1) = 0$
$x_1 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{P_1 = [0,0]}$
$x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\boxed{P_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]}$

2) $\underline{y = 1 - x}$ .... DOSADÍME DO DERIVACE $*$
$2x(1-x) + (1-x)^2 - (1-x) = 0$
$2x - 2x^2 + 1 - 2x + x^2 - 1 + x = 0$
$-x^2 + x = 0$
$x(1-x) = 0$
$x_3 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{P_3 = [0,1]}$
$x_4 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{P_4 = [1,0]}$

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

10 15-18:01

Vypočítáme 2. derivace

$f''_{xx}(x,y) = 2y$
$f''_{xy}(x,y) = 2x + 2y - 1$
$f''_{yy}(x,y) = 2x$

Pro $P_1 = [0,0]$: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\det(H_f(0,0)) = 0 - 1 = -1 < 0$
není extrém

Pro $P_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$
$H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ LOK. MINIMUM
$\det H_f(1/3, 1/3) = 4/9 - 1/9 = \frac{1}{3} > 0$

Pozn.: pro max $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ & $\det H_f(x_0,y_0) > 0$

Pro $P_3 = [0,1]$ $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\det(H_f(0,1)) = -1 < 0 \Rightarrow$ není extrém

Pro $P_4 = [1,0]$ $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\det(H_f(1,0)) = -1 < 0$ není extrém.

10 15-18:20

1. $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ & $\det H_f(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ LOK. MIN.

2. $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ & $\det H_f(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ LOK. MAX.

3. $\det H_f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ není EXTRÉM

4. jinak – nemůžeme usoudit z Hessiánu a musíme použít nějaký TRIK (vrstevnice, řezy souřadnicovými rovinami, zvolit nějakou vhodnou parametrizace, ukázat, že v okolí stac. bodu je fce jak nad tak pod tečnou rovinou)

10 15-18:30

② Ukažte, že fce $f(x,y) = e^x \sin y + e^y \sin x$ definuje předpisem $f(x,y) = 1$ pro $[x,y] \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ implicitně proměnnou y jako fci proměnné x. Určete $f'(x)$.

v $[x_0,y_0]$ není fce zadána implicitně jako $y = y(x)$

$y = y(x)$ $\boxed{e^x \sin y + e^y \sin x = 1}$

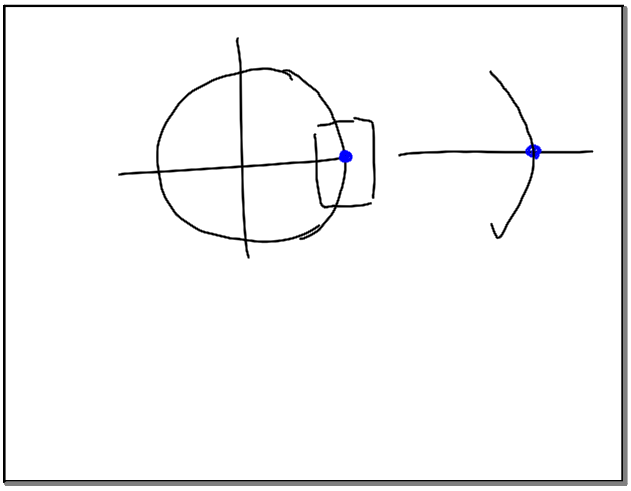
f'_x: $e^x \sin y + e^x \cos y \cdot y' + e^y \cdot y' \sin x + e^y \cos x = 0$
$y'(e^y \sin x + e^x \cos y) = -e^x \sin y - e^y \cos x$
$$y' = -\frac{e^x \sin y + e^y \cos x}{e^y \sin x + e^x \cos y}$$

Existuje tato derivace všude? musíme dát pozor na body
$e^y \sin x + e^x \cos y = 0$
$\underbrace{e^y}_{>0} \sin x = -\underbrace{e^x}_{>0} \cos y$

Protože se pohybuje v $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$

Je třeba zúžit def. obor
$(0, \frac{\pi}{2}) \times \langle 0, \frac{\pi}{2})$

10 15-18:35



10 15-18:50

③ Najděte lok. extrémy fce dané implicitně

$(\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x})'$ $y = y(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1 \cdot (\cancel{2}x + \cancel{2}yy')}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2}$$

$$\frac{x + yy'}{x^2+y^2} = \frac{y'x - y}{\frac{x^2+y^2}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2}}$$

$$\frac{x + yy'}{x^2+y^2} = \frac{y'x - y}{x^2+y^2} \quad /(x^2+y^2)$$

$x + yy' = y'x - y$
$yy' - y'x = -x - y$
$y'(y - x) = -x - y$
$$y' = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}$$

STAC. BODY: $\frac{x+y}{x-y} = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -y}$

dosadíme do zadání
$\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg}(-1)$
$\ln\sqrt{2x^2} = -\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{2x^2} = e^{-\frac{\pi}{4}}$
$\sqrt{2}|x| = e^{-\frac{\pi}{4}}$
$x = \pm\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

STAC. BODY $P_1 = [-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}] = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}[-1,1]$
$P_2 = [+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}] = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}[1,-1]$

2. DERIVACE:
$y' \cdot y' + \underline{yy''} - \underline{y''x} - \underline{y'} = -1 - y'$
$yy'' - y''x = -1 - \cancel{y'} + \cancel{y'} - y'y'$
$$y'' = \frac{-1 - y'y'}{y - x}$$

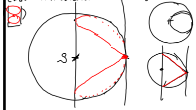
$y' = ?$ ... $y' = 0$ protože jsme ve stac. bodě

$[-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}]$: $y'' = \frac{-1 - 0 \cdot 0}{+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ <0, >0 $<0 \Rightarrow$ MAX.

$[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}]$: $y'' = \frac{-1 - 0 \cdot 0}{-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ $>0 \Rightarrow$ MIN.

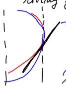
10 15-18:52

4) Určete parametrickou rovnici tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, $z_0 > 0$ ke křivce, která vznikla průnikem kulové plochy $K: (x^2+y^2+z^2=4)$ a válcové plochy $V: (x^2+y^2-2x=0)$ (tzv. Vivianiho křivka)



tečna ke křivce ... průnik tečných rovin

normálový vektor tečné roviny je ve tvaru (f'_x, f'_y, f'_z)



→ je kolmá na normálový vektor kulové plochy a současně je kolmá na normálový vektor válcové plochy

tzn. směrový vektor tečny je vektorovým součin normálových vektorů

$\vec{n}_K = (K'_x, K'_y, K'_z) = (2x, 2y, 2z)$

$\vec{n}_K(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$

$\vec{n}_V(V'_x, V'_y, V'_z) = (2x-2, 2y, 0)$

$\vec{n}_V(x_0, y_0, z_0) = (2x_0-2, 2y_0, 0)$

$\vec{t} = \vec{n}_V \times \vec{n}_K$

$\vec{t} = (4y_0z_0, 4x_0z_0 - 4z_0, -4y_0) \sim (y_0z_0, x_0z_0 - z_0, -y_0)$

$$\left(\begin{matrix} x & y & z \\ 2x_0-2 & 2y_0 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x & y \\ 2x_0-2 & 2y_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{matrix}\right)$$

$x = 4y_0z_0$

$y = 4x_0z_0 - 4z_0$

$z = -4x_0y_0 + 4x_0y_0 - 4y_0 = -4y_0$

$t \equiv (x_0, y_0, z_0) + p \cdot (y_0z_0, x_0z_0 - z_0, -y_0)$

10 15-19:09