Spojité modely a statistika – 1. přednáška
Funkce a zobrazení více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 9. 2013

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- n=1 – funkce více proměnných
- m=1 – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \ldots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována. (Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definiční obor funkce

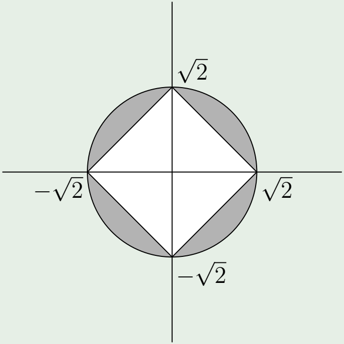
Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1,1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x,y) vyznačená na obrázku.



Příklady

Příklad

Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4})}$,

b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,

Příklad

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y,z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

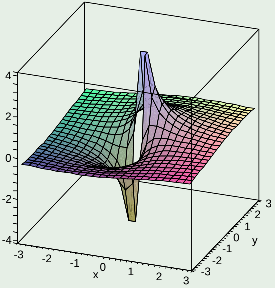
kde A je definiční obor funkce f.

Příklad

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni c o přímou analogii řezu grafu funkce f rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$ (*bokorys*), $y = 0$ (*nárys*), $z = 0$ (*půdorys*).

Příklady

Příklad

Načrtněte vrstevnice funkcí:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.