Matematika III – 2. přednáška
Funkce více proměnných: limita, spojitost, derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

25. 9. 2013

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek.

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n:

Příklad

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3))$, $t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné lze definovat:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in E_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(c(t) - c(t_0))}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce pro křivky:

Věta

Je-li $c : \mathbb{R} \to E_n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$, tj. vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T :\ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, na rozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2), t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.
$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t),\ c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,
$c'(0) = (0, 1, 0),\ \|c'(0)\| = 1,\ c''(0) = (-1, 0, 2)$.
Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|}(c'(0) \cdot c''(0))$.

Příklady

Příklad

Určete tečnu křivky dané předpisem

$$f(t) = (2\cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

Příklad

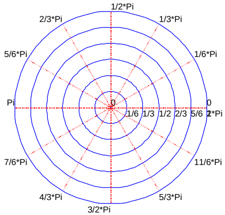
Na křivce $f(t) = (t, t^2, t^3)$ najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 1$.

Zobrazení

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc", může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic je invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

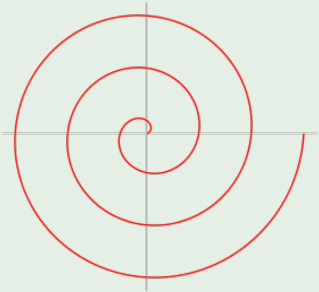
Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty" mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimedova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních“ bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).
Má-li mít funkce v daném bodě limitu, *nesmí záležet na „cestě“*, po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) + d\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu* x*, pak*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

Řešení

Viz cvičení.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v bodě a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené **souvislé** *množině A. Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ *parciální derivaci podle proměnné x_i* a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do $\mathbb{R}$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } \mathrm{x{=}0} \textit{ nebo } \mathrm{y{=}0} \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* f.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:
$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$.
Rovněž je vidět z výše uvedené věty, že směrová derivace nezávisí jen na „směru“ vektoru, ale i na jeho velikosti.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.
Ke spojitosti potřebujeme silnější pojem, tzv. *totální diferenciál*,

Příklady k procvičení

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 2)$.