Matematika III – 3. přednáška
Funkce více proměnných: diferenciál, derivace vyšších řádů, lokální a absolutní extrémy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

2. 10. 2013

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$.

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Formálně říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

(Přitom z definice derivace snadno plyne, že pak $A = f'(x_0)$.)

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě x*, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v \big) = 0.$$

Lineární funkci *df* definovanou předpisem $v \mapsto a \cdot v$ (závislou na vektorové proměnné v) nazýváme *diferenciál funkce f*.

V literatuře se často také říká *totální diferenciál* df funkce f.

Diferenciál – shrnutí

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je tedy *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $v \mapsto d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x)\big)$,
   tj. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v\big)$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již konečně dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
$f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v\to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.
Proto:

$$\lim_{v\to 0} \big(f(x+v) - f(x)\big) = \lim_{v\to 0} \big(a \cdot v + \tau(v)\big) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v\to 0} f(x+v) = f(x).$$

$\square$

Příklad

Přímo z definice určete $\mathrm{d}f$ a funkci τ pro $f(x,y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := \mathrm{d}x$, $k := \mathrm{d}y$. Pak

$$\begin{aligned} f(x^* + \mathrm{d}x, y^* + \mathrm{d}y) - f(x^*, y^*) = \\ &= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 = \\ &= 2x^*h + 2y^*h + h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{d}f(x^*, y^*)(h, k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ a $\tau(h, k) = h^2 + k^2$.

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)\big) =$$

$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Poznámka

Z předchozího je ihned vidět, že vektor parciálních derivací $f'(x)$ je přímo roven vektoru a.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1,\sqrt{3}]$.

Příklad

Spočtěme znovu jednodušeji dřívější příklad a určeme směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$ pomocí diferenciálu.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Řešení

Využijeme diferenciál funkce $f(x,y)=e^{x^3+y}$ v bodě $x=[0,0]$ s diferencemi $v=(0{,}05;-0{,}02)$. Máme

$$df(x,y)=e^{x^3+y}\cdot 3x^2\,dx+e^{x^3+y}\,dy,$$

a tedy $df(0,0)=0\,dx+1\,dy$, což celkem dává odhad $e^{0{,}05^3-0{,}02}=f(0{,}05;-0{,}02)\approx f(0,0)+df(0{,}05;-0{,}02)=1-0{,}02=0{,}98$.

Příklady k procvičení

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$,

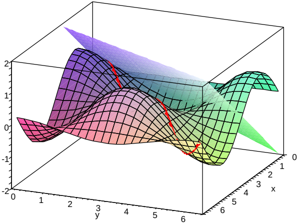
b) $1,04^{2{,}02}$.

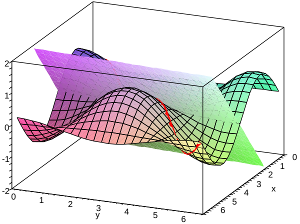
Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející bodem (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f. Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.





Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $\mathrm{d}f(x) : E_n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4],$

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?].$

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.
Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích k-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Speciálně tedy pro $n = 2$ platí (při alternativním způsobu zápisu parciálních derivací):

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Taylorův polynom funkce jedné proměnné – opakování

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu* slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o *Taylorově polynomu*.

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n. *Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 je polynom*

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taylorova věta

Věta

Nechť $f(x)$ *má spojité derivace* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ *na uzavřeném intervalu* $[a, b]$ *a nechť existuje vlastní derivace* $f^{(n+1)}(x)$ *na otevřeném intervalu* (a, b). *Potom pro každý bod* $x \in (a, b)$ *existuje bod* $c \in (a, x)$ *tak, že platí rovnost*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde $T_n(x)$ *je Taylorův polynom stupně* n *funkce* $f(x)$ *se středem v bodě* a.

Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě x, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

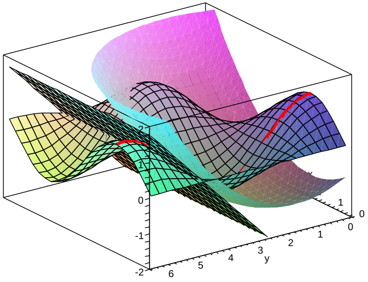
Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce f v bodě x. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

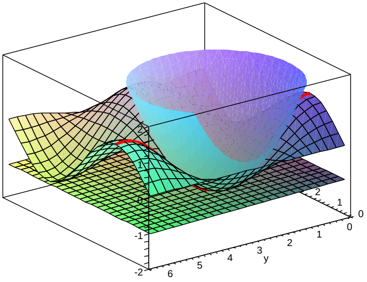
Poznámka

Analogicky jako v případě parciálních derivací lze definovat i směrové derivace vyšších řádů v bodě $x \in E_n$. Pak platí (za předpokladu spojitosti jedné ze stran v x)

$$f_{uv}(x) = f_{vu}(x) = u^T Hf(x)v = (Hf(x)u) \cdot v.$$

Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!





Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.
Obecně pro funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$, body $x = [x_1, \dots, x_n] \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ klademe

$$d^k f(x)(v) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.
U funkcí více proměnných je situace podobná, pouze formálně složitější.

Definice

Taylorovým polynomem funkce f stupně m (se středem) v bodě x^* nazýváme polynom (více proměnných), který má s funkcí f stejnou funkční hodnotu v daném bodě x^* a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řádu m včetně.

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

kde

$$T_m(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(v) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(x^*)(v),$$

resp.

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0,1),$$

je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^*$ je vektor diferencí.

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:
Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$
Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x,y)(\xi,\eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

a obecně

$$\mathrm{d}^k f(x,y)(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell}\partial y^{\ell}}\xi^{k-\ell}\eta^{\ell}.$$

Poznámka

Uvedené výrazy vám snad připomínají *binomickou větu*. Tak si je lze rovněž „neformálně“ zapamatovat:

$$d^k f(x,y)(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\xi + \frac{\partial}{\partial y}\eta\right)^k,$$

přičemž j-té mocniny nahrazujeme j-tými parciálními derivacemi.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v daném bodě:

a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad [x_0, y_0] = [1, 1],$

b) $x^{\frac{y}{z}}, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1].$

Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.
Přesnost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

Příklad

Pomocí Taylorovy věty přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi,\eta) = (0{,}05; -0{,}02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^3+y}$.

Pak

$$T_2(0+\xi, 0+\eta) =$$

$$= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0) \cdot (\xi,\eta) + (\xi,\eta) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \eta + \frac{1}{2}\eta^2.$$

Odtud dostáváme odhad

$$\mathrm{e}^{0{,}05^3 - 0{,}02} \approx 1 - 0{,}02 + \frac{1}{2} 0{,}02^2 = 0{,}9802.$$

Příklady k procvičení

Příklad

Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte

a) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,

b) $\ln(x^2 + y^2 + 1)$ v bodě $[1{,}1; 1{,}2]$.